THOMÆ HOBBES

MALMESBURIENSIS

OPERA PHILOSOPHICA

QUÆ LATINE SCRIPSIT

OMNIA

IN UNUM CORPUS NUNC PRIMUM COLLECTA

STUDIO ET LABORE

GULIELMI MOLESWORTH.

VOL. IV.

LONDINI:
APUD LONGMAN BROWN GREEN ET LONGMAN,
PATERNOSTER-ROW.

MDCCCXLV.

LONDINI:
TYPIS RICHARDS, 100, ST. MARTIN'S LANE.

CONTINENTUR HOC VOLUMINE

I.

EXAMINATIO ET EMENDATIO MATHEMATICÆ HODIERNÆ.

II.

DIALOGUS PHYSICUS DE NATURA AERIS.

III.

PROBLEMATA PHYSICA, PROPOSITIONES XVI DE MAGNITUDINE CIRCULI, ET DUPLICATIO CUBI.

IV.

DE PRINCIPIIS ET RATIOCINATIONE GEOMETRARUM, ET DE MEDIIS PROPORTIONALIBUS IN GENERE.

V.

QUADRATURA CIRCULI, CUBATIO SPHÆRÆ, DUPLICATIO CUBI.

EXAMINATIO ET EMENDATIO

MATHEMATICÆ HODIERNÆ

QUALIS EXPLICATUR IN LIBRIS

JOHANNIS WALLISII

GEOMETRIÆ PROFESSORIS SAVILIANI IN ACADEMIA OXONIENSI.

DISTRIBUTA IN SEX DIALOGOS.

CLARISSIMO VIRO DOMINO VERDUSIO, NOBILI AQUITANO,

χαίρειν.

Carissime Verdusi, mitto ad te libellum recens editum, tibi do, et dedico. Primo, quia placiturum credo. "Mihine tuus", inquies; "hominis hæretici?" Ne tumultuare. Nihil hic invenies, quod non possis sine scandalo ecclesiæ tuæ approbare. Geometria, si hæretica est, tanto forte probabilior est. In doctrinis enim pure humanis, nihil tam Catholicum est quam errare. Condonemus ergo mutuo, ut Homerice loquar, σοὶ μὲν ἔγω, σὺ δὲ μοὶ, ea quæ diverse didicimus in Sacris. Secundo, quia ingenium tuum novi liberum, candidum, acutum. Postremo, quia amicitiam nostram aliquo modo signatam esse volui; nec alio potui. Quod tam paucis te alloquar, si id quoque amicitiæ tribueris, facies quod æquum est. Vale.

Servorum tuorum obsequentissimus

Jul. 1660. Thomas Hobbes.

INDEX CAPITUM.

EXAMINATIO

ET

EMENDATIO

MATHEMATICÆ HODIERNÆ.

DIALOGUS I.

B. Salve mi *A*.

A. Et tu mi *B*. Quid adfers novi?

B. Novum librum.

A. De qua re?

B. Mathematica.

A. Legistin'?

B. Legi.

A. Accuratene scriptum?

B. Accuratissime; quantum saltem ego judico.

A. Videam quæso.—*Johannis Wallisii oratio inauguralis.—Mathesis Universalis, sive arithmeticum opus integrum, et adversus Meibomii de Proportionibus dialogum tractatus Elenchticus.*— Quid illud sibi vult, *Mathesis Universalis sive arithmeticum opus integrum?* Num mathesin nihilo latius patere arbitratur, quam arithmetica?

B. Sic dixit fortasse, quod doctrinam rationum, quæ totam comprehendit mathesin, arithmeticæ potius considerationis esse judicaverit, quam geometricæ.

A. Quamobrem autem?

B. Causam quidem non ostendit; sed in epis-

DIALOGUS I.

tola dedicatoria illud affirmat, et ad geometriam fuisse relegatam ab arithmeticis, propterea quod sine geometria magnam in calculandis fractionibus invenerunt difficultatem.

A. Eandemne rem esse censet rationem et fractionem ?

B. Ita plane, et id pluribus tum hujus tum aliorum suorum librorum locis disertis verbis asserit.

A. Asserenti tantum, non etiam demonstranti, non est necesse ut assentiamur. Sed legamus.—*Quantumvis non sim ego prorsus nescius quanto subsidat intervallo.*—Quantumvis Wallisius doctus sit mathematicus, non est certe Latinæ linguæ peritissimus.

B. Rogo, quidni ?

A. Quia qui dicit *quantumvis*, rem determinandam relinquit arbitrio tuo ; qui dicit *prorsus*, ipse determinat. Itaque *quantumvis* et *prorsus* non cohærent. *Quantumvis doctus* Latine dicitur ; sed *quantumvis doctissimus* non item. Similiter, *quantumvis magnus* dicitur ; sed non *quantumvis infinitus*. *Quantumvis* et *etsi*, non idem sonant semper.

B. Negligentiæ huic, si hoc loco non oratorem egisset, sed mathematicum, facile ignosci potuisset.

A. Pergamus.—*Norunt melius quam mihi sit opus, sigillatim illa repetendo, singula immorari.*—Videturne tibi verba hæc Latina esse ?

B. Minime sane. Nam dictum oportuit *singulis*, ut et ipse alias loquitur.

A. Erratum ergo est typographi.—*Unde hic solus selectus fuit, qui serenissimam Angliæ Reginam Elizabetham in Græcis litteris instituat.*—Latinene hoc ?

B. Minime. Erat enim scribendum *institueret*.

A. Usus est ergo tempore præsente pro præterito imperfecto.

B. Ita.

A. An et sæpe?

B. Sæpissime.

A. Absolvamus ergo typographum.

B. Recte. Verum ego illum non laudavi a grammatica, quamquam ipse alias non intelligere et loqui Latine dedecus esse censet academico.

A. *Numeros etiam reperimus ab ipsis mundi primordiis, prout in ætatum patriarcharum catalogo liquet, per monadas, decadas, centuriasque apte dispositos, gradibus scilicet; ne inordinata numerorum multitudine et* ἀταξίᾳ *laboret calculus, vel quidem nullus omnino sit.*—Quod iterum tempore præsente utatur pro imperfecto, quoniam tu ita vis, prætereo. Hoc tantum a te quæro, utrum ab eo, quod ætates patriarcharum usque ad diluvium per centurias, decadas, monadas numerentur (Gen. cap. 5), inferri possit numerorum nomina eo tempore ita ordinata fuisse.

B. Siquidem caput illud quintum ante diluvium scriptum fuisset, illatio illa esset bona. Sed quoniam vel a Mose, vel longo post Mosem tempore ab Esdra scriptum esse omnes consentiunt, fatendum est bonam non esse.

A. Desideramus ergo in Wallisio ἀκρίβειαν illam logices, quam exigimus a mathematicis.—*Mathesis apud Chaldæos post diluvium primo floruisse creditur, deinde apud Egyptios, cum hoc tamen discrimine; Chaldæorum astronomia, Egyptiorum geometria celebrata est.*—Unde scit? Quare creditur? Cui historico? Oportuit nominasse authorem suum. Nam contra, astronomiam Chaldæos

DIALOGUS I.

ab Egyptiis didicisse, author est historiæ veteris transcriptor Diodorus Siculus, in secunda parte libri primi sic scribens: *Chaldæos etiam dicunt, qui in Babylone sunt coloni Egyptiorum, propter astrologiam celebrari, quam a sacerdotibus Egyptiis didicerunt.* Quis hæc conciliabit?

B. Etiam Wallisium credibile est, ejus quod hic dicit, authorem habuisse historiographum aliquem; nam dissentire inter se historicos mirandum non est.

A. Et præter varia theoremata de novo inventa, ipsa inveniendi methodus multum facilitatur. Algebræ, nempe, sive analyticæ usus ultra quam qui veteribus innotuit, jam innotescit.

B. Quænam sunt illa theoremata nova per Algebram inventa?

A. Intelligit fortasse ea, quæ sunt in Ougthredi Clave Mathematica. Sed tamen multa illis pulchriora in libro septimo Pappi extant, inventa per algebram, etsi sine symbolis demonstrata sint. Sed neutrius theoremata alia sunt quam quæ continentur in doctrina rectangulorum et triangulorum rectilineorum. Falsum etiam est, quod ille innuit, algebram et analyticam eandem esse rem. Falsum item, algebram methodum esse inveniendi. Sed hæc posterius magisque suo loco examinabimus.—*Astronomia eximiis inventis instauratur.*—Numerat hoc loco, *observationem stellarum circa Jovem; Solis maculas; Saturni ansulas; Jovis fascias; Lunæ asperitatem.* Sed quid hæc ad algebram? Ne a geometra quidem, aut astronomo ullo, inventa hæc sunt, sed ab illiterato quodam Batavo. Nam illi, cui inventio debetur telescopii, debetur quoque detectio stellarum Jovialium, macularum solarium, &c. Nonne et tibi sic videtur?

B. Omnino.

A. Mathematum studia, non modo pro ea quam in se habent veritate, colenda esse, quæ tamen, ipsa per se conspicua et ultra scepticorum litigia posita, animum reficiet valde et oblectabit; sed et quod rerum aliarum cognitioni non uno quidem nomine conducant multum.—Id quod de studio mathematicæ hic dicit, nonne tibi videtur dici etiam posse de studio physicæ, vel ethicæ, vel politicæ, vel denique scientiæ cujuscunque?

B. Non. Nam theoremata physicæ, quia actiones naturales pleræque sensum fugiunt; ethica, propter voluntatis humanæ inconstantiam; politica, propter ethicæ ignorationem; pauca possunt demonstrari. Præterea, habet mathematica certa quædam et indubitata demonstrandi principia, qualia sunt *definitiones, axiomata, petitiones;* quæ non habet neque politica, neque ethica, neque etiam physica. Quare mathematicam extra litigia scepticorum solam eminere recte dicit.

A. Nonne etiam rationis lineæ ad lineam, vel cujuslibet magnitudinis ad aliam magnitudinem, ἀκρίβεια sensum fugit? Potest tamen demonstrari. An non et veræ physicæ sua inest veritas, quæ vel affirmative vel negative enuntiari potest? Nonne litigat cum mathematicis non minus quam cum dogmaticis Sextus Empiricus scepticus? Præterea non minus oblectat animum in physicis, vel ethicis, vel politicis, inventa veritas, quam in geometricis.

B. Imo magis; quanto scilicet in illis sæpius erratur, quam in geometria.

A. Etiam vocabula, quibus in physica, ethica, politica philosopho utendum est, an definiri non possunt?

B. Possunt.

DIALOGUS I.

A. Cur ergo in his magis quam in illis desideras principia? An si assumerentur in physicis, ethicis, et politicis postulata petitionesque, sicut in Euclidis Elementis Geometriæ, eone firmiores fore demonstrationes esse judicas? Si ita judicas, toto cœlo erras. Sunt enim eo infirmiores. Quicquid enim assumitur precario, naturam tollit demonstrationis.

B. Intelligo jam quid dicendum erat Wallisio, si sententiam suam ἀκριβῶς voluisset explicare; nempe, scientiam unam altera neque veriorem, neque evidentiorem esse, sed doctores alium alio peritiorem esse, id est, veritatem magis intelligere, melius demonstrare, a tricis verborum melius cavere, et in illas si forte incidat, facilius se inde extricare posse.

A. Vix item maturo magis judicio quispiam est, quam qui rebus hisce exercitati, vel sophismatum fallacias felicius deteget, vel syllogismorum vires justamque sequelam assequetur.—Hoc quidem de exercitatis in rebus ipsis, verum; sed de exercitatis in libris, falsum.

B. Exemplo esse potest ipse Wallisius. Atque hæc sufficiat notasse in oratione inaugurali, nisi quod præterire non possum verba illius hæc.—*Quod ego interim non pro forma tantum opto.*—Nam *pro forma* vox est scholastica, non Latina. Reliqua quæ summisse legi, vulgaria, vilia esse facile cum legebas ipse animadvertisti. Transeamus jam ad Epistolam Dedicatoriam.

A. Cum quæ in publicum prodeant, pro more scilicet, eoque satis inveterato, nonnullis inscripta soleant prodire.—Non intelligo hæc. An ille ipse, quoties in publicum prodit, inscriptus (ἐστίγμενος) prodit?

B. Ad vocem illam relativum *quæ*, subaudiendum est pro antecedente, non *omnia*, sed *scripta.*

A. Bene est. Hoc ergo vult; edicta regum, quando publica fiunt, inscripta esse, nimirum, ipsorum nomine regum. Et verum est.

B. Ah, neque sic intelligendum est, sed solummodo de libris.

A. Si se ita intelligi voluit, quam facile scripsisse potuit, *cum libri qui in publicum prodeunt, &c.* (non *prodeant*, ut hic scriptum est). Verum non satis intelligo quid sibi hic vult vox ea *nonnullis*, quæ, solitarie posita sine substantivo, semper subauditam habet vocem *rebus*. Quibus ergo rebus inscribi solere dicit libros?

B. Quibus, nisi nominibus? ut (post *quinque* aut *sex* versus) ex his verbis, *vestra libuit nomina seligere, quibus qui sequitur tractatum duxerim inscribendum*, cuilibet manifestum esse potest.

A. At melius fuisset, si præcedentia sequentibus prætulissent potius lucem, quam debuissent. Sed pergo.—*Id mihi maxime visum est incumbere, ut justissimis votis suis, quantum in me est, satisfaciam.*—*Suis* hic, pro *illius*, nempe D. H. Savilii, non recte utitur. Sed nolle te grammaticam hoc loco examinari oblitus eram.—*Ex quo, inquam, hæc*, id est, symbolica, *introducta est Vietæ, Ougthredi, Harriotti, Cartesii ope, quam ingentes fecerit profectus Mathesis universa, nemo hisce rebus vel leviter exercitatus ignorare possit.*—Audin?

B. Audio.

A. Ne ipsi quidem analyticæ per potestates adscribi possunt, quæ ille hic ascribit symbolis; nam quæcunque inveniri possunt per symbola ista nova, inveniri etiam potuissent per antiquissima symbola, nimirum verba. Deinde, quinam sunt ingentes illi

DIALOGUS I.

profectus, quos fecisse dicit mathesin universam ope authorum illorum quos hic nominat? Si mihi unam solummodo propositionem indicaveris symbolicæ hujus ope inventam, præter aliquot rectangulorum et triangulorum rectilineorum metamorphoses, quæ et ipsæ sine algebra inveniri potuerunt, concedam tibi omnia quæ dixeris; et quanquam per algebram, ut nonnulli existimaverunt, nullum non problema solvi posset, nihil tamen hoc ad laudem faceret symbolorum; idem enim fieri per verba posset. Quæritur, quis numerus sit, qui, sive assumens ternarium sive multiplicans, producit idem. Diceret Wallisius: sit *quæsitum A;* quare $3 + A = 3\ A$; et dempto utrinque A, $3 = 2\ A$; et $A = \frac{3}{2}$. Nonne idem esset, si diceremus, 3 una cum *quæsito* æquari triplo *quæsito;* et duo *quæsita* æquari ternario, et proinde *quæsitum* æquari $\frac{3}{2}$. Vides ergo symbolicam istam, quam jactant, nil omnino propter symbola, sed propter solam a supposito ad consequentia ratiocinationem valere; quæ securius aliquanto, et multo magis perspicue perficitur oratione.

B. At mihi quidem utilis videtur propter symbolorum brevitatem.

A. Qui quæso? Nonne vim demonstrationum symbolice scriptarum, quam Latine, memoria tenere difficilius est? Et quanquam analytica per symbola brevius scribatur quam oratione plena, non tamen clarius, neque ut a tam multis possit intelligi; partim quod eadem symbola paucis sint communia; partim etiam quod verba ipsa, non sola symbola, animo simul percurrenda sunt. Cur autem arithmeticam speciosam ope Vietæ, Ougthredi, etc., introductam esse dicit? Quasi veteris algebræ notæ, quibus radix, quadratum, cubus, cæteræque

potestates significabantur a Diophanto, non essent symbola.

B. Quid? Nihilne addidit algebræ Vieta, sed veterum notas cum literis alphabeti tantum commutavit?

A. Nihil omnino.

B. Sed ipsam artem sive methodum, qua a *supposito* ad *quæsitum* via brevissima pervenitur, quis excogitavit primus?

A. Nescio; nisi verum sit, quod memini me alicubi legisse, fuisse Arabem quendam Ghebrum, a quo etiam artem ipsam, si modo ars sit potius quam casus, denominatam esse *Algebram.* Symbola quidem addere, subtrahere, multiplicare, dividere binomia, trinomia, etc., artis esse fateor, non magnæ. Sed ut ex supposito inveniatur id quod quæritur, nisi in facillimis quæstionibus, id vero pernego. Quid enim magistri symbolicæ hodiernæ maximi, Ougthredus et Cartesius, aliud præcipiunt, quam ut pro quantitate quæsita supponamus aliquam ex alphabeto literam, et inde *apta* ratiocinatione procedamus ad consequentia? At si ars esset, deberent quænam sit illa *apta* ratiocinatio ipsa ostendere. Quod cum non faciant, algebristæ modo ab uno supposito, modo ab alio incipere, et modo unam, modo aliam viam ingredi, coguntur. Adeo ut non minus fortuito *quæsitum* inveniunt, quam si quis in cubiculo, jussus initio facto a limine diligenter totum cubiculum intentis oculis et animo percurrere, inveniret latentem aciculam. Præterea, logarithmos invenitne Neperus ope algebræ? Aut qui canonem condidit sinuum, tangentium, et secantium, per arithmeticam speciosam id fecit? Denique quæ propositio inventa per algebram non

dependit a prop. 16, lib. vi. Elementorum Euclidis, et a prop. 47, lib. i. ejusdem, aliisque notissimis propositionibus, quas oportet prius scire, quam quis possit uti regula algebræ. Adeo, geometriæ algebra debetur, non illi geometria. Nam absque hac, quæsitum, etsi in æquatione contineatur, sæpissime ignoratur. Imo vero ipsa *Analytica per potestates*, sive cum symbolis sive absque symbolis exerceatur, adeo est exigua pars analyticæ universalis, ut nullus ejus neque in angulis, neque in circulis, neque in solidis usus sit, sed solummodo in parallelogrammis rectangulis et triangulis rectilineis. Etiam in his hoc tantum præstat, ut id, quod in illarum quas modo dixi propositionum verborum involucris continetur, eruere valeamus. *Analysis* enim *per potestates*, non procedit ab effectu ad causam, sed ab una proprietate ad aliam, non, ut est natura causæ, priorem, sed ab eadem causa genitam. Analytica ergo hæc res admodum angusta est, quanquam ad trigonometriam in rectis lineis exercendam non omnino inutilis; verum ob magnam multitudinem symbolorum, quibus hodie oneratur, una cum falsa opinione quod plus valeat ipsa methodus quam revera valet, pro peste geometriæ habenda est. Inde enim est quod investigatio causarum, a qua sola sperari potest scientia, negligitur, nimirum, propter spem factam a parum acute videntibus magistris, posse per arithmeticam speciosam nullum non problema solvi; cum tamen problemata, quæ veteres solvere non potuerunt, ad hunc usque diem maneant insoluta. Jam si quid contra hæc dicendum habeas, audiamus.

B. Nihil contra dico. Etsi enim multi hac methodo in problematis solidis usi sint, in eo tamen

processus eorum semper desinit, ut pronuntient problema, cujus constructionem quærunt per eam geometriam quæ nunc extat, esse insolubile, atque adeo opus esse ad constructionem ejus quibusdam aliis lineis, quæ nulla arte accurate duci possunt. DIALOGUS I.

A. Legamus ergo ulterius.—*Partim etiam quod arithmetices pomæria tam stricta fecerint, ut veris numeris, rationalibus scilicet et quidem integris, coerceantur.*

B. Prævideo hic quid reprehensurus es.

A. Quid?

B. Quod arithmeticam versari putet circa aliud præter numeros. Nam qui numerus verus non est, omnino non est numerus.

A. Recte. Sed et illud quoque reprehensurus eram, quod explicet qui sint vere numeri per *rationales et quidem integros.* Nam numerus ad numerum irrationalis esse non potest, quoniam omnes metitur *unitas.* Quem ergo ille numerum *non verum*, et alii *surdum* dicunt, quantitas continua est, et pertinet, non ad arithmeticam, sed ad geometriam. Præterea non recte a veris numeris distinguit fractiones. Quanquam enim soleant appellari numeri fracti, non tamen numerus frangitur, sed res in rerum numerum. Itaque duæ unciæ non minus numerus verus est, quam duo asses. Desideratur ergo hic ἀκρίβεια illa, quæ tam necessaria est geometræ, quam intelligere et loqui Latine academico. Sed pergo.—*Ut reapse ostendam etiam geometrica problemata, quatenus saltem a positione sive locali situ abstrahunt, a principiis arithmeticis vel maxime dependere: et quidem eo usque abesse, ut ad problemata sive theoremata pure arithmetica statuminanda, (quod tamen non*

DIALOGUS I.

raro factum video), geometricæ plane demonstrationes sint huc forinsecus advocandæ; ut contra, quæ geometrica habebantur, simplicius quidem et universalius ex pure arithmeticis, adeoque universalibus, demonstranda videantur.—Prætereo in gratiam tuam quod vox, *abstrahunt,* hoc in loco scholasticum sit, Latinum non sit. Sed rogo te, ubi probat id quod hic dicit?

B. Probabunt ipsius per totum hoc opus a principiis arithmeticis demonstratæ conclusiones geometricæ.

A. Id ergo videbimus inferius. Interea vero mirari mihi liceat visum esse necessarium Euclidi numeros alios planos, alios solidos appellare, et tam multa de illis demonstrare. Numerus enim neque superficies est, ut possit proprie dici planus; neque corpus, ut possit vocari solidus. Sed forte Euclides numerum a divisione continui, et demonstrationes arithmeticas a geometricis, non contra ut Wallisius, derivavit. Distulit ergo theoremata arithmetica ad Elementum septimum; ut in illis demonstrandis imitaretur demonstrationes quasdam, quæ sunt in elementis geometricis antecedentibus. Itaque Elementi ix. propositiones 18 et 19, fundantur in propositionibus 16 et 17 Elementi vi. Item decem primæ propositiones Elem. ii., in numeris demonstrari possunt; sex posteriores non possunt, propterea quod non omnes lineæ sunt commensurabiles. Ostendat tibi Wallisius, si potest, duos numeros, quorum major ad minorem eandem habeat rationem, quam majus segmentum lineæ divisæ extrema et media ratione ad segmentum minus; vel quam habet quadrati diagonalis ad latus. Ipsum latus appellabit fortasse *numerum;* sed ut te fallat, non scribet *latus,* sed *l,* vel *p,* vel aliud aliquod

symbolum. Coge igitur illum numeros suos eloqui. Dicit, credo, numerum alterum saltem esse surdum. *Surdum* autem est, quod effabile non est. Jam si series proponatur numerorum, ab unitate incipientium et unitate crescentium, infinita; nonne in illa serie numeros omnes contineri putares?

B. Certe.

A. Aut ullum eorum esse ineffabilem?

B. Nullum.

A. Nullus ergo numerus surdus est. Sed pergamus.—*Quod autem vel philologica, vel etiam alia philosophica, mathematicis immiscuerim; partim illud ad subjecti explicationem commodum videbatur, partim etiam condimenti loco, &c.*—Quid illud est, quod apparat condimenti scientiæ per se jucundissimæ? An γελωτοποιὸν, an γελοῖον acturus est?

B. Nihil minus. Nam per philologica, ea intelligit quæ continentur in cap. vi. et quibusdam sequentibus de etymologiis nominum numeralium Latinorum, plena ingenii; qualia sunt, Latinorum vocem *unum* derivari a Græco ὅ ἕν; *duo* a δύο; *tres* a τρεῖς; *quatuor* a πέτορα, πέτορα a τέτορα, et hoc a τέσσαρα; *quinque* a πέντε, posito *quin* pro πεν, et *que* pro τε.

A. Unde hæc conjicit?

B. Nescio, nisi a congruitate literarum.

A. Non est inter ὅ ἕν et *unum*, neque inter *quatuor* et τέσσαρα, neque inter *quinque* et πέντε, magna affinitas literarum; et quilibet etiam puer tantundem conjicere potuit.

B. Deinde, *bellum*, inquit, ὰ πόλεμος *fortasse dictum est.* An tandundem conjiceret etiam puer?

A. Minime. Non est enim derivatio illa neque vera neque verisimilis, sed ridicula, condimenti causa.

B. Exemplum a *simili* derivari dicit; ideoque non *exemplum* sed *exsemplum* debere scribi.

A. Quidni et *exsero* pro *exero,* et *exsisto* pro *existo,* et *exsuo* pro *exuo*, et *exsequiæ* pro *exequiæ,* et similia multa scribi jubet; qualia nemo Latinorum unquam scripsit? Eadem enim est ratio in his, quæ in *exemplum.* Credo sperasse illum novitate hac fore olim, ut distingueretur ab indoctis hominibus hujus seculi. Sed errat: sicut enim nullius *exemplum* secutus est ille, ita nemo illius *exsemplum* est sequuturus. Sed quænam sunt ea, quæ appellat *condimenta philosophica?*

B. Nescio; nisi ea intelligat quæ disseruit de natura mathematicæ, et de natura demonstrationis.

A. Pergamus ergo ad reliqua Epistolæ Dedicatoriæ. Excusans se quod tardius prodierit liber ejus quam speraverat;—*Interea,* inquit, *temporis bis occurrebat castigandus Hobbius; Latine primum; Elencho meo in ipsum edito, quo ipsius in libro* De Corpore ἀγεωμετρησία *castigatur, et fastus reprimitur; deinde et Anglice, ob scriptum ipsius Anglicanum convitiis fartum, quo scurram agit, &c.*— Hoc habet mercedis ob politicam suam, Leviathan.

B. Fortasse Wallisius contra illum iratus scripsit, et tanto asperius, quanto liber ille hominibus honestis magis placuit. Sed videamus an in hoc libro Wallisii, nihil sit quod mereatur castigari.

A. Accedentibus jam ad ipsum opus mathematicum, ubi orationi scientificæ debitam ἀκρίβειαν exigere non modo iniquum non est, sed etiam necessarium, quicquid non accuratissime dictum, id liberum erit reprehendere. De rebus enim, quarum scientia certa esse potest, idem est non accurate, et false dicere. Itaque qui propter inscitiam

scribere vel disserere accurate nesciunt, quoties reprehenduntur, hac defensione uti solent, non esse litigandum de verbis, ubi res constat; cum tamen de veritate rei nisi accuratissimis verbis constare non possit. Non moror ergo homines illos ambitiose graves, qui propriæ imperitiæ aliorum prætendunt λογομαχίαν. Quasi aut esset disputatio aliqua, quæ λογομαχία non esset, aut veritas aliqua, quæ non esset verborum veritas. In quocunque igitur libro, de quacunque scientia, hujusmodi verba inveneris: *mera et hæc* λογομαχία; *non placet, dum de re constet, de verbis litigare:* pro certo habeas scriptorem illum scientiæ, quam tractat, imperitum esse, ignorantiamque suam gravitate, ut videtur ipsi, sententiolæ velle tegere. Nec molestum tibi sit, si quicquid, sive in dictionibus hujus authoris sive in ratiocinatione, ἀκριβείᾳ debita carere videro, notavero: ea saltem lege, si quomodo eadem ἀκριβῶς enuntianda sunt, simul docuero.

B. Non iniquum postulas.

A. Præterea, in philologicis illis, ut vocat, condimentis, postulo ut liceat mihi conjecturis illius apponere conjecturas meas.

B. Neque hoc iniquum est.

A. Inscribitur caput primum *De Mathesi in genere, et de objecto et distributione ejus.* Videamus ergo quam sit accuratum.—*Disciplinæ mathematicæ dicuntur omnes illæ sive artes sive scientiæ, quæ circa quantitatem peculiari modo versantur, sive continuam sive discretam.*—Tune definitionem hanc censes esse accuratam?

B. Ego vero satis. Etsi vox illa, *peculiari modo,* nisi ex sequentibus non facile intelligitur.

A. Expone ergo verba illa ex sequentibus.

DIALOGUS I.

B. Intelligit quantitatem *peculiari modo,* id est, strictiore sensu, prout ad numerum et magnitudinem restringi solet.

A. At intelligi ita non possunt. Nam *versari circa quantitatem, sive continuam sive discretam,* quæ eadem sunt cum magnitudine et numero, posita sunt in ipsa definitione.

B. Minime. Nam in definitione, per *quantitatem continuam* intelligit solam quantitatem corporum, nempe lineam, superficiem, et solidum, exclusa quantitate temporis, loci, motus, et ponderis: per *quantitatem* autem *discretam,* exclusa oratione, solum numerum; propterea quod tempus, locus, motus, pondus, *vix ullam,* inquit, *subeunt speculationem mathematicam, nisi ad modum vel magni vel multi considerantur.*

A. Videtur sane non bene intelligere Wallisius, quid sit ipsa quantitas. Neque id mirum est; cum nemo geometrarum illorum, qui ante ipsum fuerunt, tradiderit quantitatis definitionem; ipse autem examinatione nulla, sed tantum lectione, suam fecerit geometriam alienam.

B. Quomodo autem quantitatem definis tu?

A. Quantitas est, per quam quærenti de qualibet re, quanta sit, apte respondetur; sive, quod idem est, *per quam cujuslibet rei magnitudo determinatur.* Verbi causa: longitudine proposita, quæro quanta ea sit. An responderi apte putas, *longitudinem esse?* An potius quod sit tanta, quanta est *ulna,* vel quanta est aliqua alia mensura vel mensuræ; vel quod sit ad longitudinem expositam in hac vel illa ratione? Similiter, si quæstio fiat de superficie vel solido, non apte respondebitur nisi per mensuram aliquam vel comparationem cum

aliquo mensurato. Alioqui quærentis animus nihil habet, in quo acquiescat, determinatum. Non sunt ergo longitudo, superficies, solidum, *quantitates* ipsæ, sed *quanta*, vel potius, sine scholarum etiam antiquarum barbarismo, *tanta*. DIALOGUS I.

B. Nihil video propter quod hæc non sint accurate dicta. Sed quid inde infers?

A. Istuc infero, tempus, locum, motum, pondus, non minus proprie quantitates dici, quam linea, superficies, et solidum. Cum enim neque hæc neque illa quantitates sint, sed quanta, æque sunt utraque quantitates. Cumque tam illa quam hæc quantitatem habeant, sunt æque utraque quanta. Quare in definitione hac Matheseos universalis, nihil est neque ἀκριβὲς neque ὑγιὲς. Multa habet Archimedes in libris suis per motum et tempus demonstrata, quæ tamen ne Wallisius quidem ipse, credo, negabit esse et bene demonstrata et pure mathematica.

B. Quid Wallisius negaturus sit nescio. Sed tempus, locus, etc., mihi quidem videntur quantitates non minus proprie dictæ, quam magnitudo, et numerus; nec quantitas a magnitudine aliter distingui, nisi quod per quantitatem intelligimus determinate tantum, magnitudo autem vox sit indefinita. Video item alteram post adhibitam mensuram comparationemque cum alio actu semper dici; alteram non semper. Sed desidero adhuc definitionem *mensuræ*. Mirandum enim esset, si qui geometriæ, quam sine mensuratione assequi nemo potest, prima principia posuit, *mensuram* nusquam definisset.

A. Definitio *partis* (subaudi, *aliquotæ*) tradita ab Euclide initio Elementi quinti, paucis mutatis

erit definitio *mensuræ*. Est enim *mensura magnitudo una alterius, quando ipsa vel ipsius multipla, alteri applicata, cum ea coincidit.*

B. Definitio hæc fere eadem est cum axiom. 8. Elem. i. Euclidis. Nam videmus quotidie omne genus rerum per ἐφάρμοσιν mensurari; sed plerumque repetitam.

A. Definitio ergo hæc, cum sit mensurationis quotidianæ descriptio accurata, ipsa quoque definitio accurata est. Quænam autem sunt quantitates illæ, quas *discretas* vocat?

B. Numerum et orationem.

A. Scio. Sed quid significat vox ea *discreta?*

B. Ponitur hoc loco pro *interrupta*, sive *intercisa*. Exempli causa; Euclidis, in prioribus quidem sex Elementis, diagrammata ex lineis constant perpetuis, sive continue ductis, quibus exponitur lectori quantitas continua; deinde, in tribus Elementis sequentibus, lineis usus est punctim designatis, sive lineis intercisis, ut exponeret quantitatem *numeri*. Videtur ergo Euclidi origo numeri consistere in divisione integri continui?

A. Certissime.

B. Sed Wallisio, contra, ex compositione *unorum*.

A. Quanquam is, qui primus numeravit, utrum corpus corpori apposuit, an in corpora divisit, nihil referat; posterius tamen verisimilius est; nisi putem illum hominem unum vocasse *unum;* deinde unum hominem et unam arborem *duo;* item unum hominem, et unam arborem, et unum montem, *tres;* et sic deinceps. Numerus enim, absolute dictus, supponit in mathematicis unitates, ex quibus constituitur, inter se æquales: æqualitatem autem unitatum in quantitate oriri nisi a divisione integri

continui in partes æquales, vix potest cogitari. Utut tamen hoc sit, nisi numerus consideretur ut sic ortus, scientia arithmetica fere periit. Nam ex additione unitatum theoremata arithmetica valde pauca, ex divisione continui omnia possunt demonstrari. Deinde *oratio,* cur ponitur, primo, inter quantitates? An quia oratio una quam alia longior esse potest? Quare ergo non potius ponitur inter quantitates genus ejus, nempe sonus? Nam et sonorum alius est longior, alius brevior. Cur non sunt etiam latratus, ruditus, mugitus, quantitates, et quidem discretæ? Deinde cur est oratio *discreta* quantitas. An quia dividitur? Si ita sit, quidni sonus tubæ dicetur quantitas continua?

B. Orationem esse *quantitatem,* et quidem *discretam,* dicit Aristoteles.

A. Credo. At non nunc quærimus quid sit Aristotelicum, sed quid sit τὸ ἀκριβὲς.—*Tempus tractat astronomia.*—Tractat quidem, sed an ut tempus? Proprietatemne *temporis* ullam demonstrant astronomi? Ut loquerentur de *tempore* necessarium erat propter *motum.* Annum, mensem, diem, horas, et horarum minuta prima, secunda, etc., definiunt astronomi, non ad *temporis* proprietates, sed partes cognoscendas quæ motu corporum cœlestium distinguuntur.—*Item chronologia.*—Chronologia historiæ quidem, sed non scientiæ, pars est.—*Locus autem in steriometria, quantum ad ejus capacitatem.*—Quid quæso interest inter *loci capacitatem, et loci magnitudinem?*

B. Plane nescio.

A. Sed verebatur, puto, ne si dixisset magnitudinem, etiam *locum* ad quantitatem proprie dictam, quem ante inde expulerat, videretur reduxisse.—

Orationem tractat musica aliarum.—An ut *orationem*, an ut sonum? Ut sonum certe, qualis est musica hodierna; quanquam hoc fortasse rectius dixit, quam sensit. Nam antiquitus tum verba tum modos componere ejusdem erat artis musicæ.—*Motus autem et pondus in mechanicis præsertim considerantur.*—Quid? An mechanici opus esse putat *demonstrare?* Vel motus et ponderis nullas esse proprias passiones quæ demonstrari possunt? Quis nescit omnia, quæ recte facit mechanicus, fieri ex præscripto et secundum regulas mathematicorum? Mathematici ergo est, ut aliarum quantitatum, ita etiam motuum et ponderum rationes demonstrare. Vides igitur quam crassa hæc sunt Wallisii professoris, et ab ἀκριβείᾳ ἐπιϛημονικῇ aliena. Sed doctrinam rationum omnem fatetur considerationis esse vel arithmeticæ, vel geometricæ; neque nescit, credo, ipsis rationibus suas esse certas quantitates: nam una ratio major alia vel minor esse potest. Est ergo ratio quantitas proprie dicta, etiam ex doctrina illius. Respondeat mihi jam, utrum numerus sit ratio. Negabit, puto. Qui fit ergo, ut tractetur in arithmetica, et sola quidem, ut ille vult? Rursus, utrum ratio sit linea, vel superficies, vel solidum. Nihil horum. Vel quantitas continua, vel discreta. Neutram dicet. Qui fit ergo, ut tractetur in pure mathematicis?

B. Si ratio, neque continua quantitas, neque discreta sit, non videtur saltem mihi omnino esse quantitas.

A. Quid ita? Si quis quantitatem omnem *continuam* vel *non continuam* esse diceret, necessarium faceret ut omnis quantitas alterutra earum esset. Sed non idem sequitur ex divisione in *continuam*

et *discretam.* Itaque ut rationem ad aliquod quantitatum genus referam, quantitas dividenda est in absolutam et relativam. Absoluta est longitudinis, superficiei, solidi temporis, motus, per se considerata quantitas. Relativa est, qua determinatur quanta sit quælibet dictarum magnitudinum, ut comparata cum alia ejusdem generis. Deinde absoluta quantitas alia est corporum, ut longitudo corporis; alia temporis, ut longitudo temporis; alia motus, ut velocitas et pondus. Item rationum alia est geometrica, alia arithmetica.

B. In quo ergo genere ponis rationem numeri ad numerum?

A. Rationem tam geometricam quam arithmeticam divido in rationem rei ad rem, et rationem rerum ad res. Putasne in ullo alio quantitatum genere collocari oportere rationem duarum ulnarum ad duos palmos, quam in qua collocatur ratio unius ulnæ ad palmum unum? Aut rationem plurium ad plura aliam esse speciem rationis, quam unius ad unum? Aut aliam quidem esse speciem quantitatis tres ulnas, aliam autem unam ulnam? Aut denique rationem unius ulnæ ad tres ulnas, non eandem esse, quam habet unum ad tria?

B. Sunt quidem hæc ita manifesta, ut mirandum sit Aristotelem quantitatem discretam nominasse. Est enim ratio numeri ad numerum nihil aliud, quam ratio partium aliquotarum quantitatis continuæ ad quantitatis continuæ partes aliquotas, et inter se et illis æquales. Itaque, ut more meo cum Aristotelicis loquar, sicut calor a calido abstrahit, ita numerus abstrahit ab inæqualitate partium, dum considerantur partes non aliter quam quatenus plures.

DIALOGUS I.

A. Recte. Sed discedis jam a libris.

B. Quidni?

A. Procedamus ad alia.—*Quamquam autem hæc omnia in disciplinis mathematicis tractentur, non tamen per se et primario, sed quatenus vel mensurantur vel numerantur.*

B. Ne mihi quidem hoc placet; propterea quod geometriam ipse definit inferius scientiam esse magnitudinis, quatenus est mensurabilis, et arithmeticam scientiam esse numeri, quatenus numerabilis. Itaque magnitudo et numerus non meliore jure, ex illius sententia, quantitates sunt proprie dictæ, quam illæ alteræ locus, tempus, motus, etc.

A. Vides ergo necessitatem circa scientias loquendi ubique ἀκριβῶς. Nam qui ita non fecerint, obliti eorum quæ scripserant, neque habentes ipsi ideas rerum, cogentur sibimetipsis turpiter contradicere.

B. Da quæso scientiæ, quam appellant mathematicam, definitionem aliquam accuratam.

A. Mox faciam. Legamus interea rationem ipsius nominis *mathematicæ* apud Wallisium; et quare videtur illi impositum esse solis geometriæ et arithmeticæ.—*Si de Mathematum sive Matheseos nomine quæratur, cur hac appellatione insigniantur illæ disciplinæ; ideo fortasse fuit, quoniam mathemata apud multos quidem sola, apud alios antiquorum primo ante alias disciplinas loco ediscebantur; adeoque,* κατ' ἐξοχὴν, μαθήματα *dicta, quia* πρωτομάθητα.—Quoniam hæc ait *fortasse ita esse*, nos quoque *fortasse* aliter esse non minus probabiliter affirmare possumus. Fortasse ergo fuit, quod veritas theorematum circa magnitudines tantum et numeros antiquitus docebatur, et propterea a magistris dis-

cipuli eam ἔμαθον, id est, didicerunt, intellexerunt, perceperunt, id quod sine summa evidentia facere non potuerunt. De aliis rebus, sine principiis manifestis et sine accurata ratiocinatione, in porticibus et ambulacris, a sedentibus ambulantibusve, scholastice, id est, στοχαστικῶς disserebatur, quemadmodum nos nunc disserimus per *fortasse*. Et quidem si propter hoc dicebantur mathematica, non est difficile universaliter definire quid sit mathesis. Est enim mathesis, *cognitio veritatis per demonstrationem.*

B. Scientiæ ergo, juxta tuam definitionem, sunt omnes mathematicæ. Cur ergo Græci non omnes scientias sic vocabant?

A. Annon omnes sic vocabant, quæ traditæ erant demonstrative? Nam quæ theoremata demonstrata habuerunt Græci veteres, præterquam circa quantitatem?

B. Puto nulla.

A. Vides ergo causam cur illæ scientiæ, quarum subjectum est quantitas, solæ habitæ sunt ab antiquis mathematicæ, et sic appellantur etiam hodie. Itaque si illo tempore doctrinæ moralis et civilis fuissent demonstratæ, cur non credam et illas pro mathematicis haberi potuisse? Non enim subjectum, sed demonstrationes faciunt mathematicam.

Transit jam ad scientiarum mathematicarum species.—*Sunt autem disciplinæ mathematicæ aliæ puræ, aliæ mixtæ. Puras dicimus illas, quæ quantitatem absolute consideratam tractant, prout a materia abstrahitur. Mixtas autem illas appellamus, in quibus præter considerationem quantitatis, sive multitudo illa fuerit sive magnitudo,*

DIALOGUS I.

etiam subjectum cui inest connotatur.—Hæccine tibi videntur dicta esse accurate?

B. Ita.

A. Annon qui quantitatem considerat, considerat eam prout abstrahitur a materia? An vox *quantitas* abstracta non est a concreta voce *quantum?* Quænam autem est ea scientia, quæ non modo quantitatem considerat, sed etiam subjectum ejus? Quasi subjectum non consideraretur tunc, quando considerantur ejus accidentia. Cujus, quæso, scientiæ subjectum est, sine accidentibus consideratum corpus?

B. Nullius. Neque dicit ille subjectum cum quantitate sua *considerari*, sed *connotari.*

A. Si connotari non sit considerari, qui fit ut, sola quantitate considerata, scientia appelletur mixta? Video eum nihil hic videre. Scribit quæ didicit puer. Scientia enim, quemadmodum subjectum ejus, nempe mundus, non dividitur per *puram* et *mixtam* in species, sed in partes; eo modo qui dicetur infra, postquam legerim hujus capitis reliqua.—*Verbi gratia, ubi in arithmetica traditur bis duo quatuor efficere, numeri hic seorsim considerantur, et abstractim ab omni materia subjecta.*—Vide quæso hominis negligentiam, doceri dicentis in arithmetica, *bis duo efficere quatuor.* Si doceatur hoc in arithmetica, etiam in arithmetica demonstratur. Quis hoc unquam demonstravit aut demonstare conatus est, aut ex principiis arithmeticorum nunc positis demonstrare potest? Ne assumitur quidem ut *communis notio*, neque ut *petitio*, sed a pueris domo affertur.—*In aliis secus est, verbi gratia, cum docet astronomia æquatorem et zodiacum se*

mutuo in binis punctis secare.—Astronomia illud non docet; neque opus proprium astronomi est illud demonstrare, sed geometræ. Observat astronomus duos solis motus, diurnum et annuum, in duobus fieri circulis maximis; deinde, ut geometra, investigat quem faciunt angulum. Itaque omnia fere theoremata astronomorum demonstrata sunt a Theodosio, Menelao, aliisque geometris, qui scripserunt de Sphæra.—*Est enim arithmetices subjectum purius quiddam et magis abstractum, quam subjectum geometriæ.*—Neque verum est hoc, neque rationem, propter quam verum sit, aut is aut alius quisquam unquam attulit. Deinde longimetriam, planimetriam, et stereometriam numerat inter mathematicas mixtas; cum tamen longitudo, superficies, et solidum sint per suam ipsius distributionem geometriæ puræ subjectum adæquatum.—*Neque interim mechanices et architectonices obliviscendum est. Quarum utraque, præsertim mechanica, geometricas mensuras ita ad molem corpoream applicat, ut et interim ponderum et virium motricium rationem habeat.*—Rursus mechanicam annumerat scientiis, quasi mechanici esset demonstrare. Mirum ni et calceamentaria mathematicis mixtis annumeranda sit, quia metitur pedem.

B. Antequam transeas ad Caput ii., præsta quod promisisti, scientiarum distributionem et singularum definitiones accuratas.

A. Cum scientiæ nec sine ratiocinatione acquirantur, neque in ratiocinatione locum habeant voces ambiguæ, quales sunt metaphoræ et totum troporum genus; antequam accingamur ad ratiocinationis opus, nempe scientias, discamus oportet accurate loqui, id est, præfinito loqui.

B. Quid illud est, præfinito loqui?

A. Præfinito loqui, est vocabulis uti *prædefinitis*, præsertim illis ex quibus constare debent conclusiones demonstrandæ. Sunt enim definitiones principia scientiarum, sive propositiones in demonstratione omnium primæ; quæ nisi accuratæ sint, quæ sequuturæ sunt omnes incertæ erunt. Accurate autem definire, dependet ab intellectu vocum, ab observatione quomodo significationes earum pro diversitate circumstantiarum variantur, et quid sit quod in omni illa significationum varietate est commune; nam id quod per vocabulum aliquod ubique intelligitur, illud est significatio ejus accurata. Quod si necessarium aliquando fuerit ut vocabulo utamur novo, facile est illud definire, id est, quid nos verbo nostro intelligi volumus explicare. Itaque hoc recte facere ante omnes scientias discendum est. Et hæc quidem sive peritia sive prudentia recte definiendi, quæ acquiritur experientia circa verborum usum, vocatur *Philosophia Prima.*

B. Supponamus autem hominem ratiocinari accurate jam posse. Quæro quot sunt scientiæ, et quomodo per definitiones proprias aliæ ab aliis distinguuntur?

A. Una est omnium rerum scientia universalis, quæ appellatur *Philosophia*, quam sic definio.—*Philosophia est accidentium quæ apparent, ex cognitis eorum generationibus; et rursus ex cognitis accidentibus, generationum quæ esse possunt, per rectam ratiocinationem cognitio acquisita.* Quærunt enim philosophi omnes circa rem cognitam, vel quid ab ea produci potest, vel unde ipsa

produci potuit. Quot sunt ergo rerum species, tot sunt philosophiæ totius partes sive scientiæ particulares.

B. Sed qua methodo distinguendæ sunt?

A. Eadem qua distinguuntur ipsa phænomena sive accidentia quæ apparent, nimirum, incipiendo a maxime communibus.

B. Quæ sunt illa?

A. *Magnitudo* et *motus*. Et quoniam hæc in omni corporum actione effectum partim producunt, ut motus, partim augent vel minuunt, ut magnitudo, prout major est vel minor, scientia, in qua determinantur magnitudines tum corporum tum motuum, primo loco ponenda est: nam primo loco discenda est, quippe quod sine illa cæteræ acquiri non possunt.

B. Scientia hæc quomodo appellatur?

A. *Geometria.*

B. Defini geometriam.

A. *Geometria est scientia determinandi magnitudines.*

B. Breviter quidem satis, sed parum perspicue. Non enim intelligo quid sit *magnitudinem determinare.*

A. Magnitudinem determinare, idem est quod ostendere quanta sit.

B. Quomodo autem ostenditur vel cognoscitur magnitudo exposita, quanta sit?

A. Comparando eam cum magnitudine alia mensurata, vel quæ habeat ad mensuratam rationem cognitam. Itaque geometria definiri potest sic: *geometria est scientia, per quam cognoscimus magnitudinum inter se rationes.* Sed quoniam eæ cognosci non possunt, nisi exposita sit quantitas aliqua

DIALOGUS I.

per mensuram cognita, juxta quam cæteræ possunt æstimari, definitio geometriæ clarior erit, si sic dicamus; *geometria est scientia determinandi magnitudinem, sive corporis, sive temporis, sive rei cujuslibet non mensuratæ, per comparationem ejus cum alia vel aliis magnitudinibus mensuratis.*

B. Exquisite hoc. Et quoniam magnitudo continua quælibet data dividi potest in partes quotlibet aliquotas, ratione ejus ad quamlibet aliam non mutata, manifestum est arithmeticam in geometria contineri. Sed cupio etiam definitionem audire arithmeticæ seorsim a geometria.

A. *Arithmetica est scientia determinandi multitudinem rerum non numeratarum, per comparationem cum numerata vel numeratis.* Itaque qui de quantitate loquens continua, geometra est, idem de eadem loquens quantitate ut divisa in partes aliquotas, est arithmeticus.

B. Assentior. Progredere ad alia.

A. Proximo loco poni oporteret *Physica Universi,* siquidem ab homine acquiri posset, qua determinaretur magnitudo et motus universi tanquam corporis unius, et quæcunque inde consequuntur. Tertio loco, succedit scientia, qua determinantur corporum cœlestium visibilium, id est, stellarum tum fixarum tum planetarum, comprehenso etiam globo telluris, et motuum quibus eorum unumquodque fertur, magnitudines; appellaturque *Astronomia.* Quarto, scientia qua motus corporum invisibilium determinantur, a quibus calor, frigus, lumen, cæteræque qualitates generantur, et operationes non visæ, gradusque earum fiunt: vocatur autem *Physica.* Deinde ad astrorum partes venientes, id est, ad partes globi terrestris, (nam astro-

rum sublimium partes non satis percipimus), infinitæ statim apparent rerum sublunarium species, quarum magnitudines, motus, actionesque considerandæ sunt. Harum autem scientiarum nomina vel ab ipsis subjectis, vel ab eminentibus subjectorum qualitatibus, derivari solent; ut quæ de plantis tractat, *phytologia;* de corporibus animalium, *anatomica;* de visione, *optica;* de ratiocinatione, *logica;* de moribus humanis, *ethica;* de civitate, *politica,* etc.

B. Si tantam speculandi materiam præstet unica species homo, quando putas otium nobis fore contemplandi cæteras? Transeamus jam, si volueris, ad Caput ii.

A. De geometria, et arithmetica speciatim; earum definitiones, objecta, principia, et affectiones; easque vere scientias esse.

B. Accuratior forte erit hic quam in præcedentibus.

A. Non puto. Geometriæ et arithmeticæ duplices affert definitiones, alteras ab objecto, alteras a fine.—*Priori modo definitur geometria, scientia magnitudinis quatenus mensurabilis.*

B. Non accurate hoc? In definitionibus enim Aristotelicis, signum esse solet summæ ἀκριβείας vox illa *quatenus.* Nam accuratam definitionem, juxta Aristotelem, dictam esse oportet non modo *de omni* et *per se,* sed etiam *quatenus* ipsum.

A. Recte id quidem Aristoteles; non tamen in omni definitione ea voce utitur. Subjectum *physicæ* dicit Aristoteles esse *corpus mobile, quatenus mobile.* Vides *corpus mobile* significare subjectum ipsum. In eo autem considerari possunt multa, quæ physicus non considerat. Itaque ut opus physici in sola mobilitate determinaret Aristoteles,

DIALOGUS I.

adjecit illud *quatenus mobile.* Sin dixisset, *physicam scientiam esse in qua demonstrantur affectiones corporis orientes ex ejus mobilitate,* non puto adjecisset *quatenus mobile.* Sic Wallisius potuit dixisse, *geometria est scientia magni, quatenus mensurabilis,* sed non *magnitudinis quatenus mensurabilis;* propterea quod in corpore quidem, sive magno sive parvo, sunt alia multa quæ considerari possunt præterquam quod sit *mensurabile;* in magnitudine autem nihil. Deinde illud, scientia *magnitudinis,* sive etiam *magni,* tantem abest ab ἀκριβείᾳ, ut sit absurdum. Quid quæso est *scire magnitudinem,* vel *scire magnum?* Præter alicujus dicti veritatem, nihil sciri dicitur; itaque nisi *magnum* sit *propositio,* sciri non potest.

B. Quomodo definit arithmeticam?

A. Arithmeticam vero esse scientiam numeri, quatenus numerabilis.

B. Eadem sunt et hic vitia.

A. Posteriori vero modo, geometriam dico scientiam bene mensurandi; arithmeticam autem scientiam bene numerandi.—Quid est mensurare?

B. Mensuram definiisti supra, describens id quod faciunt qui aliquid mensurant, nimirum *mensuram esse applicationem,* &c. Itaque mensurare est applicare mensuram ad magnitudinem mensurandam, quoties fieri potest, ut mensuræ ad mensuratum ratio ad sensum exponatur. Itaque corpora consistentia quidem per *lineas,* liquida autem et quæ fluida sunt per *vasa,* mensurari solent.

A. Nonne ergo bene mensurare sciunt, qui mensuras mensurandis bene προσαρμόζειν, id est, applicare sciunt? Omnes ergo homines, per definitionem hanc Wallisii, sunt, non minus quam ipse, geome-

træ; ut etiam omnes, qui multitudinem quam vident numerare possunt, sunt, ut ille, arithmetici.

B. Sed per *mensurabilitatem et numerabilitatem,* intelligere se dicit, *quicquid ad eorum singulas affectiones et habitudines investigandas et intelligendas attinet.*

A. Itaque per *mensurare* et *numerare* intelligit *demonstrare.* Voluit certe idem quod est in definitione mea, *quicquid magnitudinem determinat, sive facit cognitam.* Sed quia illud non intellexerat, eloqui non potuit.—*Quod illas autem scientias dixerim, non est cur quisquam miretur,* &c. *Habent enim subjecta, principia, et affectiones, easque de subjectis, demonstrationibus maxime scientificis demonstratas.*—Vera quidem, nesciente illo, est consequentia; at si vox *principia* id significat quod vult ipse, vera non est. Habet certe geometria principia sua, nempe puncti, lineæ, superficiei, solidi, anguli, figuræ etc., definitiones; et præterea axiomata per se manifesta, et petitiones quasdam non iniquas. Hæc sunt principia geometriæ. Per hæc demonstrantur subjecti quanti affectiones. Ille autem hæc non intelligit, neque principia ipsa, aut quomodo conducant ad demonstrationem. Audi quid dicit de principiis.—*Principia quod attinet, punctum quidem est principium magnitudinis, unitas autem numeri, ut vulgo perhibetur. Nam ex fluxu puncti linea, ex fluxu lineæ superficies, superficiei vero corpus oriri traditur. Item ex unitatibus numeros fieri satis liquet.*—Viden' quam paucis verbis quantam suam indicavit ignorantiam? Probandum susceperat geometriam arithmeticam* vere scientiam esse. Medium probandi assumit,

* Sic Edit. 1668. Quære "geometriam *et* arithmeticam"?

DIALOGUS I.

quod subjecta habeant et principia et affectiones de subjecto demonstratas. Assumpti partem unam, nempe quod habeant principia, sic probat; *punctum quidem magnitudinis, unitas autem numeri principium vulgo perhibetur.* Censen' tu geometram esse, qui quod probare debuit, ab authoritate probat vulgi?

B. Peccatum fateor est, nec parvum.

A. Demus autem ei satis hoc demonstratum esse. An geometram esse dices, qui, cum geometriam et arithmeticam principia habere ostendere deberet, ex eo probat quod punctum est principium magnitudinis, et unitas numeri? Intelligisne quomodo punctum principium esse potest geometriæ?

B. Nullo modo.

A. Aut unitas arithmeticæ?

B. Tantundem.

A. Aut eandem rem esse magnitudinem et geometriam? Aut numerum et arithmeticam?

B. Æque.

A. Aut puncti definitionem et punctum ipsum esse idem?

B. Quid tu hæc tam absurda a me quæris?

A. Quid? nisi ut mihi dicas sicubi argumenti hujus vim latere sentias.

B. Dicam quod sentio; nempe fraudi illi fuisse, quod cum vox *punctum* principium sit libri Elementorum Geometriæ Euclidis, habuit ipsum pro principio geometriæ, pariterque, quia vox *unitas* prima est in libris ejusdem arithmeticis, putavit unitatem principium esse scientiæ arithmeticæ. Miror sane hominem Peripateticum adeo oblitum fuisse Aristotelis sui, ut non meminerit principia alia esse, ut nos loquimur, *essendi*, alia *cognoscendi*.

A. Pronum est oblivisci, quæ non intelligas. DIALOGUS I.

B. Est in his illius verbis quod non minus reprehenderem, quam ea quæ tu, quanquam in geometriæ professore turpissima, modo reprehendisti.

A. Quid illud est?

B. *Oriri lineam ex fluxu puncti, traditum est non inepte.*

A. Recte id dicit.

B. An punctum fluit.

A. Quidni?

B. Movetur ergo.

A. Verum dicis.

B. Aristotelis est, nihil moveri præter corpus.

A. Verum hoc quoque. Non enim puncti nulla est quantitas, sed nulla computatur. Nec ipsum punctum nihil, aut indivisibile est, sed indivisum. Itaque qui dicunt tellurem esse punctum, non improprie loquuntur, quoties de ea agitur, ut in astronomia, describente lineam motus annui. Neque lineæ latitudo nulla est, sed nulla consideratur in demonstratione. Alioqui impossibile esset, quod postulat Euclides, lineam ducere; et per consequens tota periret Euclidis geometria.

B. Recte. Negato enim quod possit duci linea, neque in illius Elementis, neque in quocunque alio libro geometrico quicquam extat demonstrati. Esto ergo verum quod hic dicit. Certus tamen sum aliter sensisse ipsum cum *Elenchum* scriberet contra Hobbium, eadem dicentem quæ nunc dicis tu, quem ob id ipsum convitiis onerat.

A. Tanto est nequior. Sed pergamus.—*Non minus recte tamen, me judice, diceretur, si magnitudinis principium diceremus (prout hic loci principii vox videtur intelligenda) ipsam exten-*

DIALOGUS I.

sionem, seu partium extra partes positionem.—Quot rursus sunt hic imperite dicta! Primo, per vocem illam *videtur*, nescire se innuit quomodo vox *principium* sit hoc loco intelligenda, quam ipse hoc loco posuit; nimirum, fatetur se non intelligere quæ ipse scribit. Secundo, cum ex professo loquatur de principiis geometriæ et arithmeticæ, id est, de principiis scientiarum, id est, de principiis cognoscendi; principia tamen quærit magnitudinis et numeri. Tertio, principium magnitudinis *extensionem* esse dicit, id est *magnitudinis principium* esse *magnitudinem*. Quid enim aliud est extensio, prout is ea voce hic barbare utitur, præter magnitudinem? Extensio, proprie loquendo, actio est illius qui aliquid ex curvo rectum facit. Ille autem *positionem* esse dicit *partium extra partes*. Quamobrem? Nimirum ut salva sibi sit opinio sua *Apopatetica*, quod idem magnitudine corpus, locum modo majorem, modo minorem occupare possit.

B. Fortasse; nam in *Elencho* suo Hobbium, qui aliter sentit, strenue vituperat.

A. Quarto, cum dixisset ante, opinionem eorum, qui magnitudinis principium dicunt esse punctum, non ineptam esse, addit *non minus recte diceretur etc.;* quasi utraque posset esse vera. Sed pergamus.—*Numeri principium duceremus ab ea modificatione, qua quid unum multa dicimus.*—Primo, quid est illud quod appellat *rerum modificationem?* Aut quid aliud hic dicit quam quod res ita modificantur, ut res una sit unum, et multæ multa. Accurate. Deinde, *prout ab identitate oritur unitas, ita et a rerum diversitate oritur numerus.* Docte. Scilicet *idem* est *unum, diversa multa.* Sed nonne et diversum est unum? Quid

ergo id quod recte, cum vulgo, ante dixerat, numeri principium esse unitatem, nunc mutat?—*Sed et ipsa unitas non incommode numerorum catalogo accenseri possit.*—Quomodo non incommode, nisi et vere? Sed quare non incommode? Quia, *numerus de omni illo dicitur quo quæstioni* quot sunt *affirmative respondetur:* et quia, *arithmetica eodem modo et unitatem et cæteros numeros tractat.* Multa habet theoremata Euclides de numeris post unitatem certa ratione procedentibus, de unitate nullum. Neque quidem numeris primis accenset unitatem.—*Et quidem apud grammaticos numerus singularis sine solœcismo dicitur.*—Quamquam in hac quæstione grammaticorum authoritas non multum valere debeat, non tamen ideo dicunt numerum singularem, quod credant unitatem esse numerum, sed quod in numero quidem singulari flexionem ponant nominis quod significat rem unam, in plurali autem, nominis quod significat res plures.

B. ἀκριβῶς. Sequitur Caput iii., *De Demonstratione.*

A. Demonstratio est syllogismus, qui affectiones proprias de subjecto per proprias causas demonstrat.—Intelligisne per definitionem hanc quid sit demonstratio?

B. Quidni?

A. Intellexti ergo quid significat vox *demonstrat.* Unde autem, si nesciebas quid esset demonstratio?

B. Recte dicis. Nam sciebam ante, ex definitione Aristotelica, quam et ipse apposuit, nempe hanc: ἀποδείξις ἐςὶ συλλογισμὸς ἐπιςημονικὸς ἐξ ἀληθῶν, καὶ πρώτων, καὶ ἀμέσων, καὶ γνωριμοτέρων, καὶ προτέρων, καὶ αἰτίων τοῦ συμπεράσματος: quam ille reddidit breviorem.

A. An definitionem *hominis* Aristotelicam bre-

DIALOGUS I.

viorem facere dicendus erit, qui in ejus locum hanc substituerit, definitum ponens in definitione, *homo est homo;* quemadmodum Wallisius ponit *demonstrare* in definitione *demonstrationis.*

B. Video nunc definitionem Wallisianam vitiosam esse. Sed illa Aristotelica nonne bona est?

A. Melior quidem, sed non accurata. Nam etsi fieri possit, ut demonstratio ex unico constet syllogismo, id tamen rarissimum est. Debuit ergo dicere συλλογισμὸς ἢ συλλογισμοί. Deinde, illud καὶ προτέρων, abundat; nam ante dixerat καὶ πρώτων. Tertio, illud καὶ αἰτίων τοῦ συμπεράσματος, proprium non est syllogismi demonstrativi, sed omnium syllogismorum commune, etiam eorum in quibus tam major quam minor propositio est falsa. Exempli causa; syllogismus legitimus est, *omnis homo est lapis; omnis lapis est animal; ergo omnis homo est animal.* Vides hic conclusionem necessario sequi ex præmissis, et propterea præmissas falsas causas esse posse conclusionis; ut tamen syllogismi tales non sint demonstrationes. Postremo, demonstratio omnis procedit ab ipsius affectionis demonstrandæ causa; ut si ab eo, quod terra interposita sit inter solem et lunam, (exemplo utor Aristotelico), eclipsin fieri lunæ demonstraretur; interpositio terræ non est conclusionis causa, sed eclipsέως. Fallit interdum *vox,* pro *re* se ingerens.

B. Quænam autem est demonstrationis definitio accurata?

A. Demonstratio est syllogismus, vel syllogismorum series, a nominum definitionibus usque ad conclusionem ultimam derivata.

B. Quid, si syllogismorum aliquis, vel definitio aliqua vitiosa sit?

A. Neque syllogismus est, qui vitiosus est, neque definitio, quæ vitiosa.

B. Quid si conclusio sequatur, sine definitione, axiomata. An non erit demonstratio ?

A. Erit ; modo axiomata illa tum manifesta sint, tum etiam demonstrari, si imperetur, possint ; qualia sunt axiomata sumpta ab Euclide.

B. Sed ipsa *definitio* quomodo definitur.

A. Definitio nonne propositio est ?

B. Est.

A. Nonne etiam est explicativa nominis definiti ?

B. Etiam.

A. Quomodo explicatur nomen quodvis, verbi gratia, nomen *homo ?*

B. Si ponatur vox *homo* pro subjecto propositionis, deinde pro prædicato, nomen quod fit, aggregatum est omnium nominum quibus homo distinguitur a rebus cæteris omnibus. Exempli causa, distinguitur ab omnibus accidentibus per nomen *corpus ;* a cæteris corporibus per nomen *sentiens ;* a cæteris sentientibus, sive animalibus, per nomen *rationale.* Itaque si dicamus homo est corpus sentiens rationale, erit illa propositio *definitio* hominis. Nomina enim, quæ ad faciendum prædicatum aggregantur, complicata sunt in una appellatione illa *homo,* ipsumque hominem ab omni alia re distinguunt, id est, quid sit definiunt.

A. Recte dicis, neque quicquam aliud fecisti præterquam quod resolvisti vocem *homo* in partes suas. Fuisset autem satis illi, qui prædefinitum haberet *animal,* posuisse, *homo est animal rationale.* Definitio ergo *definitionis* accurata erit hæc : *definitio est propositio cujus prædicatum est subjecti resolutivum.*

DIALOGUS I.

B. Quid autem fiet si subjectum resolvi non potest, ut plerumque fit in generibus summis?

A. Cum finis definiendi sit ambiguum tollere, si per nomina id fieri non potest, faciendum est per exempla. Addamus ergo definitioni nostræ pauca etiam verba, ut tota hæc sit; *definitio est propositio, cujus prædicatum est subjecti resolutivum, ubi fieri potest; ubi fieri non potest, exemplificativum.*

B. Perge legere.

A. *Quæ tamen definitio non omni demonstrationi convenire putanda est; sed illi quæ est* τοῦ διότι, *quæ etiam* κυρίως *demonstratio dicitur. Ad demonstrationem* τοῦ ὅτι, *sufficit argumentum ab effectu.*—Vellem definisset quid sit illa demonstratio τοῦ ὅτι. Nam demonstratio τοῦ διότι est, quando quis ostendit propter quam causam subjectum talem habet affectionem. Itaque quoniam demonstratio omnis est scientifica, et scire talem esse in subjecto affectionem est a cognitione causæ quæ illam necessario producit, nulla potest esse demonstratio præterquam τοῦ διότι. Recte ergo dicit, illam, quæ dicitur τοῦ ὅτι, non esse κυρίως demonstrationem, id est, non omnino demonstrationem. Nam in sermone mathematicorum, *non esse* et *non proprie esse*, idem sunt.

B. Ratiocinatio quæ incipiens a veris principiis conclusionem recte infert, proprie dicitur demonstratio. Neque credo Aristotelem demonstrationem vocasse ne quidem τοῦ ὅτι ratiocinationem ullam in qua esset paralogismus. Necessarium ergo est ut intellexerit ratiocinationem quæ incipit, non a definitionibus, sed a suppositis, qualibus utuntur phycici, plerumque incertis. Non ergo debuerunt interpretes ejus demonstrationem τοῦ διότι

interpretari *potissimam*, sed simpliciter *demonstrationem.*

A. Videtur id voluisse Aristoteles, neque dissentiente Wallisio, qui eam appellat argumentum ab effectu. Dicendum ergo est, duplici philosophorum inquisitioni, nimirum effectuum ex causis et causarum ex effectibus, duplex respondere ratiocinationis genus, nempe priori, demonstrationem, id est, ratiocinationem ex definitionibus, quæ est scientifica; posteriori, ratiocinationem ex hypothesibus possibilibus; quæ etsi scientifica non sit, si tamen nullus appareat effectus, ne in longissimo quidem tempore, quæ hypothesin redarguat, facit ut animus in ea tandem acquiescat, non minus quam in scientia. Frustra autem demonstrationis τοῦ ὅτι quærimus definitionem, quæ demonstratio non est. Sequitur disputatio ejus contra Smiglecium; primo de *Ente Mathematico.* Quid sit ens mathematicum, non ita bene intelligo, ut ipsum, si opus esset, possem definire, aut satis distinguere ab ente metaphysico, ente physico, ente logico, ente rationali, ente intentionali, et similibus, quæ nunc passim occurrunt, neque, quod puto brevi introducetur a symbolicis, ab ente symbolico. Deinde defendit Euclidis demonstrationem omnium primam contra Smiglecium, non male, nisi quod addendum esse dicat, *in nulla quidem scientia expectandum esse, ut omnes ibidem demonstrationes æquali perfectionis gradu procedant.* Nam demonstrationes vocat, quæ non sunt scientificæ; cum tamen initio hujus capitis demonstrationem appellasset συλλογισμὸν ἐπιστημονικὸν. Itaque juxta illum, eorum quæ scimus, alia magis alia minus scimus; quod est absurdum.—*Abunde sufficit, quanquam passim immisceantur aliæ* τοῦ ὅτι.—

Abunde ergo sufficit, si in Elementis Euclidis non omnia theoremata demonstrentur demonstrationibus τοῦ διότι; id est, sufficit si alia ejus theoremata sciamus esse vera, alia an vera sint necne, nesciamus. An geometriæ professor idoneus est, qui neque, ut ante ostendimus, scit quæ sint illius scientiæ principia, neque, ut apparet hoc loco, quid sit *demonstrare*, id est, quid sit *docere?* Miror qui factum sit, ut cathedram nactus sit Savilianam.

B. Fortasse, quod in professoribus illis eligendis plurimum potuerint suffragia hominum, non mathematicorum, sed theologorum.

A. Quid? Theologiæ doctores nonne didicerant logicam? Nam errores hi non oriuntur a defectu geometriæ, sed logicæ. Unde autem commendatus est theologis?

B. Nosti quo tempore eligebatur, multum in civitate nostra potuisse eos, qui ecclesiæ regimen, in sacris, presbyterio adjudicabant; cujus sectæ est Wallisius. Præterea commendatior fortasse erat propter artem symbolicam.

A. Igitur ut rem totam dilucidius expediam, tres præsertim demonstrationum mathematicarum sive modos, sive gradus, sive species statuo. Prima quidem est illa demonstratio, quæ per deductionem ad absurdum seu impossibile procedit.—Scis demonstrandi genus hoc loco dici ducere ad absurdum, quia ducit ad contradictoriam propositionis alicujus ante demonstratæ ostensive; et quidem per demonstrationem τοῦ διότι.

B. Scio; et proinde theorema nullum, quod ex principiis immediate demonstratur, demonstratum dici potest per *deductionem ad absurdum.*

A. Qui demonstraverit propositionem quamcun-

que esse veram, nonne simul demonstrat tum contrariam tum contradictoriam ejus esse falsam?

B. Absque dubio.

A. Si igitur propositio ipsa demonstrata sit per demonstrationem τοῦ διότι, etiam contradictoria ejus, eo ipso quod contradictio detegitur, demonstratur per demonstrationem τοῦ διότι.

B. Ita censeo.

A. *Secunda demonstrandi ratio est ostensiva* τοῦ ὅτι; *ut si recta* AC *demonstraretur æqualis esse rectæ* BC, *quoniam utraque demonstrata fuerat æqualis ipsi* AB; *quæ autem sunt eidem æqualia, sunt et æqualia inter se. Estque hæc demonstratio quidem ostensiva* τοῦ ὅτι, *non autem* τοῦ διότι.—Dic mihi, si AC demonstraretur æqualis esse BC, an ideo esset demonstratio?

B. Videris mihi quærere an demonstratio sit demonstratio.

A. Si demonstratio est, scientifica est.

B. Recte.

A. An AC, BC sciri possunt æquales esse inter se, nisi sciamus prius utramque æqualem esse AB?

B. Minime, neque id dicit Wallisius.

A. Si sciri non potest AC et BC esse inter se æquales, antequam sciamus utramque earum æqualem esse AB; neque potest demonstrari illud sine demonstratione hujus.

B. Verum est.

A. Est ergo demonstratio hujus, pars demonstrationis illius.

B. Video quo tendis, nimirum, ad id quod dixisti paulo ante in demonstrationis definitione, nempe, esse eam syllogismorum seriem, cujus principium est in definitione, et finis in conclusione ultima;

quod et verum est, et manifestum facit demonstrationem totam, cujus conclusio est, AC, BC *esse inter se æquales,* esse demonstrationem directam τοῦ διότι. Nam utramque AC, BC æqualem esse AB demonstratum est per causam efficientem, nempe per constructionem duorum circulorum, permutatis centris, super eandem rectam AB. Imo vero, eadem illa constructio causa est quod duæ vel quotvis lineæ rectæ inter se æquales sint. Nam radius, quo circulus describitur, mensurat per ἐφάρμοσιν distantiam a centro ad circumferentiam in locis infinitis eandem. Non ergo est illa demonstrandi ratio ostensiva τοῦ ὅτι.

A. Neque placet mihi illa ipsa distinctio demonstrationis in *ostensivam* et *deductivam ad impossibile.* Non enim loquutio est doctori scientiarum, præsertim mathematicarum, satis accurata. Nam *demonstratio ostensiva* idem est quod *demonstratio demonstrativa.* Est enim altera, ea quæ tendit recta via ad ipsam propositionem; altera, ea quæ tendit ad contradictoriam ejus, via, primo, recta; deinde, per conversionem, ad propositionem ipsam.

B. Quoties audio quemquam dicere *demonstrationem* τοῦ ὅτι, vix me contineo ne interrogem τοῦ ὅτι τί; sed me contineo tamen, ne quod omnes se scire dicant, solus videar ignorare. Dic ergo, cum in omni demonstratione dicant *quod* verum est, vel *quod* falsum, quomodo una demonstratio est *quod,* alia *propter quid?* Nescimus enim *quod* res ita est, nisi sciamus *propter quid* ita est; juxta id quod solemus dicere Aristotelici, *scire est per causam scire.*

A. Videtur Aristoteles, cum in *Physica* animadvertisset non effectum per causam cognitam, sed

contra, causam quæri per cognitos effectus; atque id non posse accurate fieri, propterea quod similes effectus non semper et necessario similes habeant causas: ob eam rem *potiorem* demonstrationem eam duxisse, qua effectus per causam demonstratur, quæ est τοῦ διότι, quam ea quæ causam concludit ex effectu, quamque propterea appellavit τοῦ ὅτι. Quæ tamen scientifica non est, et proinde nec vera demonstratio. Non enim incipit a definitionibus, sed ab hypothesibus, quæ falsæ esse possunt; quanquam, si nulla experimenta, etiam post longissima tempora, eas redarguant, satis erunt probabiles; sed theoremata inde deducta non possunt dici demonstrata. Frustra ergo quærit Wallisius demonstrationem τοῦ ὅτι inter demonstrationes Euclidis. Sed pergo.—*Si quis denique objiciat, me tres demonstrationis species fecisse, cum vulgo duæ tantum statuantur, poterit ille, si placet, duarum priorum utramque demonstrationem τοῦ ὅτι dicere. Non enim libet de verbis contendere, modo de rebus constet.*—Benigne sane, qui quid verum sit, quia de re non constat, potestatem nobis concedit eligendi.

B. Eligo igitur hoc; unum esse demonstrationis genus nempe τοῦ διότι, sive conclusio directe demonstretur, sive per deductionem ad absurdum.

A. In Capite quarto agit de unitate, numero, et numeri principio.—*Unitas est secundum quam unumquodque unum dicitur. Numerus autem est ex unitatibus composita multitudo.*—Scilicet ita definit *unitatem* et *numerum* Euclides.

B. An non recte?

A. Numerum quidem accurate, unitatem autem imperite. Nam propter cognationem vocum *unum*

DIALOGUS I.

et *unitas*, altera in alterius definitione poni non debuit; non magis quam *album* in definitione *albedinis*, aut *albedo* in definitione *albi*. Nihil enim confert ad intellectionem vocis *concretæ* sua ipsius *abstracta*, neque contra, *abstractæ* sua *concreta*. Cavit autem Euclides ne definitione hac in demonstrationibus uteretur; atque ita factum est, ut nullum inde vitium emanaverit ad theoremata.—*Ex his autem unitatis et numeri definitionibus, plerique arbitrantur unitatem numerorum catalogo non esse accensendam, adeoque numerum minimum binarium esse; quanquam illud quidem Euclidem uspiam dixisse non memini.*—Si meminisset definitionis Euclidis, quam proxime supra ipse retulit, necesse est ut meminerit sentire Euclidem numerorum minimum esse binarium, nisi idem sit μονὰς et μονάδων πλῆθος.—*Operæ tamen pretium fortassis erit paucis ostendere cur unitatem putem vere numerum esse, aliisque numeris annumerandam. Nec huic forsan adversabitur Euclidis aliorumque sententia probe intellecta.*—Quid? An possibile est ut probe intelligatur μονάδα esse ex μονάδων συγκείμενον πλῆθος?—*Cum enim nonnulli unitatem, proprie loquendo, non modo numerum esse negent, sed et numeri partem; adeoque* numeri principium impars esse *dicant, ut est magnitudinis punctum et temporis momentum: intelligendi fortasse sunt de monade, seu unitate, non ut numerum singularem designat, sed ut est communis quasi numerorum omnium denominator. Sic enim numerus quaternarius est, qui quatuor unitates numerat.*—Tune hæc intelligis?

B. Puto.

A. Expone ea quæso.

B. Considera fractionem hanc, $\frac{4}{1}$. Quid significat?

A. Quatuor unitates.

B. Quare?

A. Quia quotcunque partes integri fractionis denominator unitas denominat, earum partium numerator numerat *quatuor*. Sed *unum* denominat ipsum integrum indivisum; sunt ergo $\frac{4}{1}$ quatuor unitates.

B. Itaque hoc dicit; illos, qui unitatem numerum esse negant, tunc solummodo id negare, quando unitas sit denominator fractionis ut in $\frac{4}{1}$ vel $\frac{3}{1}$.

A. Dicit ergo Wallisius, *dum quatuor tantundem valent ac quatuor unitates, vox illa* unitates *nec numerus est, nec pars numeri, sed vel numeri denominatio seu denominator, vel ipsum numeratum.*

B. His ergo verbis vides ut ipse, quæ obscura ante erant, clare eloquutus est.

A. Ita clare, ut scias quid illis contingere necesse sit, quibus ante nascuntur opiniones, post quæruntur argumenta quibus possunt defendi; nimirum, quemadmodum iis accidit, qui in tenebris oberrant, ut quacunque moveantur impingant in aliqua offendicula. Nam ut *unitatem* sustineat esse numerum, *unitates*, id est plures, numerum esse negat; nec quatuor, aut tres, aut quotvis unitates numerum esse patitur.

B. Non negat quatuor *unitates* esse numerum, sed *vocem illam unitates* numerum esse negat.

A. Quis nescit vocem illam *unitates*, aut, si vis, vocem illam *numerum*, non esse numerum? Nam numerus est unitatum multitudo, vox autem non est. Quæritur hic, an in fractione hac $\frac{4}{1}$ significante quatuor unitates, quatuor sit numerus, ut

DIALOGUS I.

ille dicit. Unitates numerus non sint. Imo vero unitates esse numerum verum fuit etiam ante quam ulla extiterunt nomina, aut *numerorum* aut *unius*. *Quatuor* ergo, nisi subauditis unitatibus, vel *unis* numeratis, nihil est. Unitates autem numquam non erant unitatum numerus.—Rursus, *vox illa, unitas, est numeri denominatio seu numerator. Vox autem, una, est numerus seu unitatum multitudo (multitudinis voce laxius accepta, ut post dicetur); dicit enim quot vel quam multæ unitates adesse dicantur, nimirum unicam. Aliud autem est negare unitatem, aliud vero negare unum numerum esse. Eodem enim sensu,* ἡ δέκας *numerus esse negari possit, quamvis* δέκα *numerus esse non negetur.*—Primo, obscurum est, quod dicit, *denominatio seu numerator*, quasi significarent eandem rem; præsertim cum superius, quinque versibus, dixerat *denominatio seu denominator*. An in fractione $\frac{4}{1}$ denominatio est 4, denominator 1? Deinde si vox *una* sit numerus, erit quoque numerus, id est, multitudo unitatum, *vox;* id quod nemo intelligit. Sin *una* sit numerus, erit illa numerus rerum numeratarum, puta, *unitatum*. Itaque *una unitas* est unitates. Tertio, non est verum quod dicit, aliud esse negare *unitatem*, aliud *unum* esse numerum. Nam illi quibuscum disputat, cum negant unitatem esse numerum, intelligunt per *unitatem* ipsum, in concreto, *unum*. Quarto, ἡ δέκας a quo negatur esse numerus? Annon ἡ δέκας significat propriissime idem quod *numerus denarius*, sicut δύας, τρίας, τέτρας, idem quod *numerus binarius, ternarius, quaternarius?* Sed de his negari non potest, quin sint numeri. Itaque ἡ δέκας non potest negari esse numerus. Postremo, cum probandum

illi esset *unum* esse numerum, hoc tantum probare conatus est, quosdam, qui contra sentiunt, sententiam suam non satis demonstrasse.

B. Quod unum sit numerus demonstrabit forte inferius.

A. Bene est. Pergamus.—*Sed revera, si accurate loqui velimus, non tam unitas quam nullitas, si ita loqui liceat, seu nullum, idem respectu numerorum obtinet, quod punctum respectu magnitudinis.*

B. Nollem hoc dixisset. Nam cum ab Hobbio culparetur quod punctum dixerat esse nihil, negavit se ita sensisse. Nunc tamen idem dicit apertissime. Cum enim sit ut *nullum* ad *numerum*, ita *punctum* ad *magnitudinem*, certissimum est punctum esse nihil.

A. Illud quoque ineptum est, quod cum in proxime præcedentibus distinxisset *unitatem* ab *uno*, ut *non numerum* a *numero*, nunc cum *nullo* confundat *nullitatem*. Hoccine est loqui accurate? Præterea, cum dixisset, *si accurate loqui velimus*, cur statim addit *si ita*, id est, non accurate, *loqui liceat?* An scribit dormiens? Sed progredior.—*At interrogabitur forsan, num velim ego a veterum pariter et recentiorum omnium sententia discedere, qui uno ore unitatem vocant principium numeri. Respondeo, nihil absurdi esse majorum inventis addere.*—Vide captum hominis mathematici. Mathematicorum esse putat docere an unum sit vocandus numerus; quasi non vulgi esset impositio nominum, aut quilibet e vulgo non æque sciret atque centies mille peritissimi arithmetici, utrum unum sit numerus necne, id est, juxta definitionem Euclidis, utrum homo sit homines necne. Mirarer

DIALOGUS I.

certe, cum non solum ab Euclide, sed etiam ab omnibus tum veteribus tum recentioribus sciret se dissentire, errorem in seipso esse non sit saltem suspicatus, sed eorum inventis hoc addidisse se existimaverit; nisi scirem cujus esset sectæ. Qui proxime sequuntur, circiter viginti versus, sunt gravis et acerba reprehensio temeritatis eorum, qui si vel tantillum sciunt, aliorum omnium peritiam vel flocci faciunt vel superciliose contemnunt. Cujus reprehensionis justitia ita manifesta est, ut nihil circa eam examinandum sit, nisi ad quem potissimum collimaverit.

B. Videtur hoc loco eos scriptores omnes perstringere, qui non eadem in mathematicis sentiunt quæ ipse.

A. Deinde ad institutum rediens sic scribit.—*Quod ad rem præsentem attinet, assero, et veterum sententiam probe intellectam, et quæ nos asserimus, satis constare posse. Ipsa enim principii vox duplici saltem acceptatione occurrit, prout nempe significat* primum quod sic, *vel* ultimum quod non. *Sic si hæredis jus in rem hæreditariam ab ipso patris interitu incipere dicatur; erit hoc principium* ultimum quod non. *Si vero dicamus hæredis jus inchoari a primo momento successionis; etiam ita vere dicitur, sed hoc principium est* primum quod sic.

B. Subtiliter hæc.

A. Ita; ac si dixisset, finem capitis præcedentis esse principium capitis hujus.

B. Subtiliter dico, id est, scholastice, vel metaphysice. Scholastici enim olim subtilissimi habebantur.

A. *Subtiliter* pro *barbere.* Quis putabit incho-

atum esse jus, vel aliam rem quamcunque, tunc quando neque ipsa neque ulla ejus pars existit. Sed quare homo mathematicus, de mathematicis scribens, exemplo utitur juris? An etiam juris Romani peritus est? An potius per hoc exemplum fieri posse sperabat ut esse crederetur?

B. Nescio sane; sed illum nunc incipere puto a principio, ut ille vocat, *ultimo quod non.*

A. Unum igitur numerum esse affirmo; minimum enim est, quod affirmative respondet quæstioni, quam multa.—Si dicam responderi etiam posse per *nullum,* scio quod exiget ut respondeatur affirmative. Dico ergo quæstioni, *quot* sive *quam multa,* non omnino responderi apte et plene posse sine negatione. Nam qui *unicum* habens *filium,* quærenti quot haberet filios, respondet per *unum,* non satis plene respondet, quia et qui plures habet, unum habet. Respondendum ergo non est per *unum* sed per *unicum,* id est, unum nec plures, id est, non sine negatione. Ita etiam si respondeat, plures habens, *duos,* non plene respondet, propterea quod, qui tres habet, duos habet. Respondendum ergo est per *duos nec plures,* id est, non sine negatione. Illud ergo, quod pro causa adfert quare crediderit *unum esse numerum,* causa esse non potuit. Vin' causam, quare id contra tum veterum tum recentium omnium sententiam verum esse crediderit, dicam ego, qui eam scio melius quam ille?

B. Volo.

A. Cum legebat numerorum cifras 1, 2, 3, 4, etc., vel cum audiebat nomina unum, duo, tria, quatuor, etc., cifras illas et nomina illa pro numeris ipsis nominatis intelligebat: ut et paulo ante, cum diceret *vox unitas est numerus.*

DIALOGUS I.

B. Credo sane. Sed quomodo *unitatem* et *numerum* definis tu?

A. *Unum* quidem, cum Aristotele, id quod consideratur ut *indivisum;* numerum autem, cum Euclide, *ex unis collecta plura.* Nam vox πλῆθος non significat *multitudinem,* eo sensu quo opponitur *paucis,* ut censet Wallisius, sed eo quo opponitur *uni;* adeo ut proprie loquendo, πλῆθος Græcum, et Latinum non *multa* sed *plura,* idem sint. Deinde lego in margine; *numeri fracti non sunt numeri proprie dicti.* Verene hoc?

B. Anne fractus integer est, aut numerus ullus est qui non sit integer?

A. Minime. Et tamen id quod per numerum fractum intelligitur, est numerus proprie dictus.

B. Qui fieri id potest?

A. Quid significatur per numerum fractum hunc, $\frac{3}{4}$?

B. Significantur tres partes, quarum *unitas* habet quatuor.

A. Satis quidem intelligo quomodo *unum,* quodcunque illud sit, possit dividi in quatuor partes; quomodo autem *unitas* ita dividi possit, non intelligo.

B. Cum dico *unitatem,* intelligo ipsum *unum* integrum, quod divisibile est in partes quot quis voluerit.

A. *Unum* ergo integrum sit assis. Dic mihi, an tres asses sit numerus assium.

B. Sunt.

A. Et numerus assium, numerus proprie dictus?

B. Est.

A. Et numerus unciarum, nonne est numerus proprie dictus?

B. Æque.

A. Et numerus quadrantum, nonne numerus proprie dictus?

B. Etiam.

A. Et $\frac{3}{4}$ sive dodrans, nonne est numerus quadrantum?

B. Est.

A. Idemque numerus fractus?

B. Vicisti. Nam qua ratione diceret aliquis numerum integrorum magis proprie numerum dici, quam partium, eadem ratione poterit dicere numerum boum magis proprie dici, quam ovium. Hactenus ergo non modo non ἀκριβῆ, sed etiam inepta sunt, quæ legimus; authoremque tantæ subtilitati imparem esse indicant. Capite quinto, ubi ostendere pollicetur *procreationem*, quam appellat etiam *originationem*, numerorum, expectaveram aliquid novi, ut quis primus numeros, vel saltem nomina numeralia, primus invenit. Sed de hoc ne verbum quidem habet.

A. Si igitur ubi prius nulla erat, apponatur unitas, sit numerus singularis; si adhuc addatur unitas alia, emergit numerus binarius; accedat alia, et exsurgit ternarius. Estque hæc vera numerorum originatio seu procreatio.—Eleganter illud, *ubi prius nihil erat, apponatur.* Et ex additione unitatum fieri numerum, sed nec minus fieri per ablationem partium æqualium ab uno dato, id est, per divisionem, pueri sciunt; quare autem per additionem potius quam per ablationem, pueri et Wallisius juxta nesciunt. Poterat ergo subtilitas hæc, sine ulla existimationis suæ aut eruditionis nostræ jactura, prætermitti, quemadmodum et id quod proxime sequitur, nimirum hoc, *est igitur*

impossibile ut numerus maximus assignetur. Nam et hoc pueri sciunt.

B. Quomodo sciunt pueri, cum ipsos geometras loqui audiant de recta divisa in partes numero infinitas, et librum legant Wallisii *De Arithmetica Infinitorum*, a magni nominis geometris, Schotenio et Hugenio, editis epistolis approbatum?

A. Nesciant ergo hoc pueri. Deinde ostendit dispositionem *numerorum* in decades, centurias, etc., in perpetua ratione 1 ad 10.

B. Potuit quoque hoc præteriri.

A. Sed exempla affert numerationis Græcæ et Hebraicæ, quæ forsan præterire se potuisse non putavit, quin eruditio ejus minus multiplex esse videretur.

B. Non modo hic, sed etiam in proxime sequentibus peritiam suam in hoc genere literarum aliquanto magis ambitiose ostentat, quam est opus. Quis nescit potuisse numerationem ab initio per quamlibet aliam proportionem fieri, si ita libuisset primis inventoribus? Credibile enim est, si nati fuissent homines dodecadactyli, quod numerorum progressio fuisset facta per rationes perpetuo duodecuplas. Transi ergo ad Caput sextum.

A. Caput sextum differamus, si vis, in diem crastinum. Nam sentio me lacessere.

B. Placet.

A. Sed unicum hoc prius legamus.—*Tamen quod mirum dictu est, in eadem proportione decupla omnes ubique terrarum gentes mire conspirant.*—Quid si falsum hoc sit?

B. Minus id mirum erit.

A. Walli nostri et Armorici Galliæ usque ad *decem* quidem ab unitate progrediuntur, ut nos;

deinde, resumpta unitate, non ad *viginti*, sed ad quindecim; et rursus repetita unitate ad *viginti*; inde ad *viginti quinque*, et a *viginti quinque* ad *triginti*, etc.: tanquam post decadem, per unius tantum manus digitos computarent. Sed more suo nimis temere, nec satis logice, propositionem ex inductione intulit universalem. Memineris cras redire, circa eandem horam.

B. Faciam. Vale.

DIALOGUS SECUNDUS.

A. Bene advenis.

B. Gaudeo.

A. Capita tria proxime sequentia perlegi, dum abesses. Sunt autem tota philologica.

B. Nonne erudite scripta sunt?

A. An quæ nec utilia, nec falsa, nec miranda sunt, placere posse arbitraris? Capite sexto, ubi pollicetur nominum numeralium Latinorum omnium derivationem a nominibus numeralibus Græcis, nihil præstat præterquam quod conjecturam faciat a similitudine literarum. Ut taceam autem quod, promissi oblitus, deducit *secundum* a, non Græco, *sequor*; quid tritius esse potest quam *duo* a δύο, tres a τρεῖς, sex ab ἕξ, septem ab ἑπτα, octo ab ὄκτο derivare? Quid ineptius quam *bellum* a πόλεμος deducere; et *unum* dicere quasi ὁ ἕν, (mallem quasi οὖνος), et inde per *hoenum, fohenum, boenum*, venire ad *bonum*; quia scholares dicunt unum et bonum

DIALOGUS II.

esse convertibilia? Præterea, quinque a πέντε ridicule deducit, atque etiam impudenter, mutando πέν in *quin*, et τε in *que*.

B. Fateor duriusculum esse hoc.

A. Nec minus *centum* ab ἕκατον; et *mille* a μύρια, vel potius a μύρια et χίλια; et *quatuor* a τέσσαρες.

B. Memini eum a τέσσαρες processisse ad τέτταρες Atticum, inde ad poeticum πίσυρες, inde ad πίτορες, postremo ad Cambricum *pedwar* et Armoricum *pevar*. At a πίτυρα vel πέττορα vel πέτορα facilis est transitus ad *quatuor*, propter affinitatem literarum *p* et *qu* in *quispiam* et *quisquam*, *nuspiam* et *nusquam*.

A. Credin' ita esse?

B. Scio Massiliam fuisse Phocensium coloniam Æolorum; itaque nomen πέτορα, si Æolicum sit, potuisse a Massiliensibus venire ad Gallos. Gallorum colonia erant Cambri, seu Walli. Cur ergo non potuit ex πέτορα, si vox, inquam, ea sit Æolica, fieri *pevar*?

A. Potuit. Sed unde didicit ille *quatuor* Æolice dici πέτορα, aut omnino vocem illam esse Græcam?

B. Forte qui pro certo habebat vocem *quatuor* a voce πέτορα derivatum esse, nec videbat quomodo id aliter fieri potuit, dubitare noluit quin ibi esset vox πέτορα ubicunque esset πίσυρες, et debere πίσυρα verti Attice in πίττυρα, et postea in πέτορα, ut facilis esset transitus ad *quatuor*.

A. Julius Scaliger deducit quoque *quatuor* et *quinque* a Græca origine, sed aliter. Nimirum, cum antiquissimis temporibus tria tantum numerorum nomina haberent, ἕν, δύο, τρία, dicebant digitis numerantes post τρία, χάτερον, et post quatuor κὶ ἕν κὲ, quæ Latini pronunciabant *quatuor* et *quinque*.

B. Subtilius Scaliger, sed uterque nugatorie.

A. Idem censeo. Transeamus ergo ad Caput septimum.

B. Imo vero ad decimum: nihil enim continent septimum, octavum et nonum, præter numerorum variam scriptionem, nimirum in Cap. vii., modum scribendi numeros per literas alphabeti communem Græcis et Hebræis; in octavo item, modum scribendi per literas alphabeti communem Græcis et Latinis; in nono de cyphris maxima ex parte satis cognitis, cætera partim frivola, partim aliena. Sed a voce *cyphra*, ortum habuisse docet voces *cyphrandi* et *decyphrandi*, pro scriptura occulta et ejusdem explicatione.—*Qua scribendi ratione tempore belli civilis cum omnes fere uterentur, non pauca hujusmodi scripta in itinere suo* (nota quod in Anglia itinera faciunt epistolæ) *intercepta, ipsi* (ut ait) *explicanda tradebantur. Et quidem eorum nonnulla tam insuperabili difficultate involuta videbantur, ut fere de illorum explicatione desperaverit, nec nisi post diuturnam inquisitionem incredibili labore superaverit. Quorum non pauca specimina in publica Bibliotheca Bodleyana Oxoniæ conservanda tradidit.*

A. Ad scientiarum Wallissianarum cumulum una defuit gloria, bene deciphrandi: merito ergo peritiam istam suam ignorari noluit; præsertim cum Thuanus, vitam scribens Francisci Vietæ geometræ et algebristæ, ante Wallisium, maximi, ingenium ejus ab eadem facultate laudavisset. Nam cyphræ symbola sunt, et earum cognitio est pars symbolicæ. Itaque æquum erat, ut ab ea arte ipse, ut cui deerat laudator similis Thuano, laudaret sese.

B. Incipit hinc jam opus arithmeticum. Sed antequam ad examinationem ejus veniamus, non abs re fore arbitror si geometriæ et arithmeticæ

DIALOGUS II.

principia, quantum fieri potest, accuratissime statuamus, præsertim ea quibus utuntur, ab Euclide, mathematici omnes: ut quæ in illis accurata sunt, etiam nos utamur; quæ accurata non sunt corrigamus; et quæ desunt suppleamus. Sunt enim vera et accurata principia legitimarum demonstrationum κριτήριον unicum. Definitio ergo puncti accuratene tradita est ab Euclide, nempe hæc, *punctum est cujus nulla est pars?*

A. Accurata est, sed a geometris plerisque male intellecta. Nam verba hæc, *cujus nulla est pars,* ita intelligunt, quasi scriptum esset *cujus nulla potest esse pars.* Nonne videtur tibi aliud esse *actum* negare, aliud negare *potentiam?*

B. Negatur *actus* tum cum dicitur esse *indivisum;* negatur *potentia,* cum dicitur esse *divisibile.** Euclidis ergo definitio tollit puncti divisionem; at quantitatem non tollit. Nihil enim impedit, quo minus *quantum* sit id quod est *indivisum.* Illi vero, qui dicunt punctum esse *indivisibile,* omnino tollunt quantitatem ejus, et faciunt ut sit *nihil;* quod aliquoties facit Wallisius in omnibus ejus libris mathematicis.

A. Divisio est opus intellectus; intellectu facimus partes. Itaque astronomi non in cœlum ascendunt ut sphæras dividant, sed quasi divisas considerant. Idem ergo est *partes facere,* quod *partes considerare.* Ego vero *punctum,* eodem sensu, sed (ut voce ea uti possimus) aliis verbis, ita definiendum accuratius esse censeo: *punctum est corpus, cujus non consideratur, id est, non intrat in demonstrationem geometricam, ulla quantitas.*

B. Secundum definitionem hanc, impossibile est,

---

* Sic Edit. 1668. Quære "*in*divisibile"?

ni fallor, ut longitudo arcus circuli comparari possit cum recta linea, quod faciunt cyclometræ, per doctrinam tangentium et secantium. DIALOGUS II.

A. Quid ita?

B. Nonne potest sector circuli quilibet in partes quotlibet dividi, quæ partes omnes erunt totidem sectores minores?

A. Potest. Quid tum?

B. Nonne sector quilibet desinit in punctum?

A. Ita.

B. Si ergo quadrans circuli, exempli causa, in millies mille sectores minores divisus sit; nonne iidem sectores compositi sunt quadrans?

A. Etiam.

B. Et cum arcus illi arcum constituunt quadrantis, nonne et centra eorum constituent quadrantis centrum.

A. Recte; et quia centrum quadrantis pro puncto haberi potest, habebimus punctum punctis millies millibus æquale. Jam qui tangentium et secantium magnitudines calculant, pro puncto sumunt totius arcus dividendi centrum; et proinde latitudines linearum majores justo, nempe, unam lineam alia latiorem faciunt, et pro exilissimis sectoribus exilissima computant rectangula.

B. Secunda definitio est, *linea est longitudo quæ nullam habet latitudinem.* Videturne bona?

A. Minime. Nam quid opus est latitudinem negare de longitudine, quasi longitudo aliqua posset est lata? Quamvis enim filum unum alio, vel semita una alia latior esse potest, tamen miliare unum latius esse non potest quam aliud miliare. Est autem non filum nec semita viæ longitudo, sed miliare. Euclides ergo in definienda linea hoc

DIALOGUS II.

voluit; lineam esse corpus, in quo longitudo quidem et sola computatur, latitudo vero non computatur; nempe, *viam corporis moti, cujus corporis nulla consideratur quantitas:* quemadmodum lineam definivit Hobbius.

B. Nihil est in his duabus definitionibus tuis, quod non valde comprobem, nisi quod non mihi videatur vox *corpus* satis bene sonare in definitionibus puncti et lineæ.

A. Cur in definitione lineæ vel descriptione hac, *linea fit ex fluxu puncti,* non male sonat auribus tuis vox *fluxus,* cum fluxus non possit esse nisi corporis? Præterea, qui dicunt lineam esse longitudinem, non loquuntur accurate; nam longa est, potius quam longitudo. Et quoniam longitudo lata intelligi non potest, definitio hæc Euclidea idem valet ac si dixisset *linea est longitudo;* quæ definitio non est.

B. Tertia est, *lineæ autem termini sunt puncta.* Quid huic objicies?

A. Objicio authoritatem Wallisii, qui terminum lineæ primum, id est, principium quod vocatur *ultimum quod non,* dicit non esse ipsius lineæ terminum, sed lineæ antecedentis. Videtur autem statuere terminum etiam alterum, nempe, finem lineæ, esse in linea sequenti, et vocari debere *primum quod sic.* Itaque aut falsus est Wallisius, aut Euclides falsus erat, qui terminos lineæ in ipsa statuit linea. Sed non videtur hoc loco voluisse Euclides quicquam definire; nec aliud explicare quam hoc ipsum, terminos lineæ non esse considerandos extra ipsam lineam.

B. Quarta est, *recta linea est, quæ ex æquo sua interjacet puncta.* Qualis videtur?

A. Mala; nec intelligibilis, nedum accurata. Inter quænam sua ipsius puncta potest *interjacere* linea recta, præterquam inter extrema? Et quomodo inter ea *ex æquo* interjacet magis quam curva, nisi forte quod non declinet ab aliqua alia linea, eadem habente extrema, magis in unam partem quam in aliam? Quod si ita sit, quare non possunt esse inter eadem puncta extrema plures rectæ lineæ. Præterea, intelligi non potest quomodo linea recta *ex æquo*, id est, æqualiter, interjacere inter sua extrema dicatur, nisi intelligamus prius quid sit *æquale*.

B. Definitio æqualium ab Euclide, nescio qua de causa, prætermissa est; quanquam circa æqualitatem et inæqualitatem omnis versetur geometria.

A. Axioma octavum ad Elementum primum Euclidis, instar definitionis est *æqualium linearum*, vel etiam *æqualium superficierum*, nempe hoc, *quæ sibi mutuo congruunt, ea inter se sunt æqualia.*

B. Non est ea æqualium definitio, quanquam vera propositio, et quæ multis theorematis demonstrandis satis bene inservierit; sed videtur potius descriptio quædam ejus, quod faciunt illi qui magnitudines rerum metiuntur. Nam qui mensurant, mensuram congruere faciunt cum mensurato. Defini ergo æqualia.

A. *Æqualia sunt inter se corpora, quæ eidem loco congruere possunt.* Et, *æquales magnitudines sunt magnitudines æqualium corporum.*

B. Hæ quidem definitiones sunt corporum et magnitudinum *æqualium*, non autem simpliciter *æqualium*. Nam *temporum*, *motuum*, *ponderum*, aliarumque rerum multarum æqualitati, neutra earum applicari potest.

DIALOGUS II.

A. Tempora, motus, pondera æqualia seorsim definienda sunt *ea esse quorum mensuræ, sive corpora quibus mensurantur, æquales sunt.*

B. Nondum definiisti quid sit ἀκριβῶς linea recta.

A. Recta linea ea est, quæ per totam viam ab uno termino ad alterum æqualiter distat a quibuslibet lineis, similibus et æqualibus inter se, et eosdem habentibus terminos.

B. Intelligo. Sic axis terræ linea est recta, propterea quod æqualiter distat per totam viam a circumferentiis duorum pluriumve circulorum meridianorum.

A. Sed neque definitio hæc intelligi potest, nisi ab iis qui intelligunt quænam lineæ similes vel dissimiles dicendæ sunt. Itaque rectissime fecisset Euclides, si lineam curvam prius definisset.

B. Quid est linea curva?

A. Linea curva est cujus termini, salva quantitate, diduci possunt.

B. Nam qui aliquid curvum facit, vel ex curvo magis curvum, terminos ejus adducit. Jam lineam rectam egomet definiam *eam esse, cujus termini diduci non possunt.* Definitio quinta est, *superficies est quæ longitudinem latitudinemque tantum habet.*

A. Bona est. Sexta, *superficiei termini sunt lineæ,* similis est tertiæ, nec definitio, sed propositio, qua significatur lineas non esse considerandas ut extra superficiem terminatas, sed in ipsa, ut puncta in linea quam terminant.

B. Quid est superficies plana? Nam definitio, quæ traditur ab Euclide, eodem laborat vitio quo quarta. Illud enim, *ex æquo suas interjacet lineas,* non est intelligibile. Defini ergo superficiem planam.

A. Faciam. Sed definienda est prius linea. Est ergo linea, *via qua fertur motum punctum.* Jam, *superficies plana est via lineæ ita motæ, ut singula ejus puncta singulas describant lineas rectas.*—Definitio octava est anguli plani hæc: *planus angulus est duarum linearum, in plano se mutuo tangentium et non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.* Hujus definitionis vitium primum est obscuritatis; nempe in voce *inclinatio.* Nam secundum Euclidem, inclinatio esse non potest nisi in angulis acutis; itaque angulus rectus nullus est. Secundum vitium est falsitatis. Nam recta et curva ita constitui possunt, ut nec jaceant in directum, nec constituant angulum, ut in angulo contactus; nisi putaret angulum contactus esse angulum; quod negat, post Pellitarium, Wallisius. Itaque illis, non Euclidi, falsitas hæc imputanda sit. Et præterea, quia duo anguli recti compositi faciunt angulum, nimirum recti duplum, et tamen in directum jacent; contra hanc definitionem. Postremo, angulus, quem faciunt duæ circumferentiæ, vel circumferentia et recta, mutuo sese tangentes, comparari posset quoad quantitatem cum quolibet angulo alio plano; quippe, cui convenit definitio hæc anguli plani universalis. Sed non anguli plani omnes comparari possunt. Est ergo vitiosa definitio.

B. Quomodo definis tu angulum planum accuratius?

A. Sciendum est vocem hanc *angulus planus* æquivocam esse. Nam cum in omni angulo intelligantur duæ rectæ sibi mutuo occurrentes, vel saltem ad occursum tendentes, fieri potest ut duplici modo id fiat; quorum alter est per motum

DIALOGUS II.

lineæ integræ circularem, alter per continuam lineæ rectæ flexionem. Quæ duæ angulorum generationes adeo sunt diversæ, ut ipsi anguli sint heterogenei, nec una definitione comprehendi possint. Habet quidem uterque nomen anguli, sed alter simpliciter ita vocari solet; alter per adjunctum *angulus contactus*. Hæc, cum non recte intellecta fuerint, controversiam excitarunt de angulo contactus inter Clavium et Pellitarium; quæ excitari non poterat, si definitio Euclidis satis fuisset perspicua.

B. Audiamus utriusque generis anguli definitionem tuam.

A. *Angulus, simpliciter dictus, est duarum linearum sibi mutuo in plano congruentium, facta per motum circularem super altero termino ut centro, unius ab altera digressio.*

B. Anguli quantitas quomodo definitur?

A. Quantitas *anguli*, simpliciter dicti, est quantitas *arcus circuli cujuslibet descripti centro illo, in quo lineæ quæ arcum intercipiunt se mutuo tangunt, ab iisdem lineis intercepti. Angulus autem contactus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium digressio facta per continuam flexionem.*

B. Quare duo hæc genera angulorum non possunt sub uno magis amplo genere contineri?

A. Quia non mensurantur per unius mensuræ applicationem. Nam angulus simpliciter dictus, tantus est quantus est arcus circuli interceptus; ideoque per arcum circuli mensuratur. At angulus contactus, mensuratur per lineam rectam ductam a puncto contactus ad circumferentiam. Itaque magnitudines duorum angulorum contactus men-

surantur a linea recta, quæ ducitur a puncto contactus per utriusque circumferentiam. DIALOGUS II.

B. Intelligendum est hoc de angulo contactus circuli tantum.

A. Imo vero de angulis contactus quarumcunque curvarum, modo similes sint; sed quando sunt dissimiles, erunt anguli contactus eorum iterum diversi generis.

B. Definitio nona est, *rectilineus angulus est quem continent duæ rectæ.* Probamne esse putas?

A. Ita.

B. Si duo arcus circuli se mutuo secent, vel arcus et recta, angulus quem faciunt rectilineus non est, neque angulus contactus. Qualis igitur est angulus?

A. Est angulus simpliciter dictus. Non enim a natura linearum dependet natura anguli. Potest enim a curva linea in plano jacente circulus describi, et arcus interceptus idem erit ac si a recta describeretur, et proinde etiam anguli quantitas eadem erit.

Definitio decima est anguli recti, et rectæ perpendicularis, nempe hæc: *cum recta super rectam consistens, angulos qui sunt deinceps æquales fecerit; rectus est uterque æqualium angulorum; et recta insistens, perpendicularis dicitur lineæ cui insistit.* Sequuntur definitiones undecima et duodecima angulorum obtusi et acuti, brevissimæ simul et rectissimæ; nimirum, *recto hunc quidem minorem, illum autem majorem esse.* Verum divisio hæc in *obtusum, rectum,* et *acutum,* angulo simpliciter dicto soli convenit. Definitio decima tertia; *terminus est, quod alicujus extremum est.*

B. Neque definitio est hæc, quia vox una per

DIALOGUS II.

vocem unicam definiri non potest: neque omnino necessaria; nisi enim intellexissemus quid sit *terminus*, frustra esset definitio tertia, ubi dicit lineæ *terminos* esse *puncta*.

A. Definitio decima quarta, hæc est; *figura est, quæ sub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur*. Quæ quidem vera est. Poterat tamen idem brevius dici, *magnitudo corporis ab omni parte finita*.

B. Neque vero intelligi potest, ad quid refertur relativum *quæ*, nisi ad magnitudinem. Absurdum enim esset dicere, *figuram esse figuram quæ sub aliquo*, etc.

A. Decima quinta est; *circulus est figura plana sub una linea comprehensa, quæ peripheria appellatur; ad quam ab uno puncto eorum quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales*. Definitio hæc, etsi vera sit, et modus describendi circulum sine geometrarum ope satis cognitus, pro accurata tamen haberi non debet. Debuit enim ostendisse prius hujusmodi figuræ constructionem sive generationem quænam esset, ut sciremus aliquam in rerum natura figuram esse, in qua ab unico puncto ad figuræ extremum omnes undequaque lineæ essent inter se æquales. Quod quidem illis, qui nunquam circulum describi viderant, videri posset incredibile.

B. Quomodo autem definiendus est circulus per generationem?

A. *Circulus est figura descripta per lineæ, in plano existentis et cujus unus terminus quiescit, circumductionem*. Qua methodo definiendi utitur etiam Euclides in definitione *sphæræ*, *coni*, et *cylindri*.

Decima sexta est; *hoc vero punctum centrum circuli appellatur;* id est, punctum quod in generatione circuli quiescebat. Decima septima hæc est; *diameter autem circuli est recta quædam per centrum ducta, et ex utraque parte in circuli peripheria terminata, quæ circulum bifariam secat.* In qua nihil est non accuratum, nisi quod postrema verba, *quæ circulum bifariam secat,* abundent. Definitio enim diametri absoluta erat sine illis verbis; quæ inter axiomata, vel potius inter demonstrata theoremata, ponenda erant.

Definitiones cæteræ usque ad tricesimam quintam, quæ Elementi primi postrema est, ut facillimæ, ita etiam accuratissimæ sunt. Ipsa autem postrema hæc est: *parallelæ sunt lineæ rectæ, quæ cum in eodem sint plano, et ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.*

B. Quid in hac definitione reprehendis?

A. Definitionem hanc parallelarum rectarum, quod attinet ad usum, satis bonam esse non nego. Sed quoniam parallelismus omnis, tam rectarum quam curvarum, tam linearum quam superficierum, ejusdem est naturæ, et una definitione universali comprehensibilis: rectius fortasse fecisset, si parallelas simpliciter definisset. Præterea nisi causa aliqua in definitione parallelarum rectarum appareat, quare duæ rectæ nunquam concurrant, absurdum non erit si hujusmodi lineas possibiles esse negaverimus.

B. Defini ergo simpliciter parallelas.

A. *Duæ lineæ quæcunque, sive rectæ sive curvæ; item duæ superficies, planæ vel non planæ, parallelæ sunt, in quas incidentes lineæ rectæ facientes-*

DIALOGUS II. *que cum utraque angulos æquales ad easdem partes, sunt semper ipsæ inter se æquales.*

B. Video jam quare parallelæ concurrere inter se non possunt; distinentur enim ubique ab æqualibus rectis, iisdemque æqualiter et ad easdem partes inclinatis. Recte autem apponuntur verba illa, *ad easdem partes;* nam alioqui definitio non esset parallelarum simpliciter, sed solummodo rectarum.

Sequuntur postulata tria: de quibus postulatis quæro, quo sensu dici possint demonstrationis principia. Postulatur enim ut aliquid possit fieri. Principiorum autem demonstrationis natura est, postulare ut aliquid sit habendum pro vero sine demonstratione. Quærimus enim in scientiis non quid facere nos possumus, sed quid verum est.

A. Neque vero sunt postulata hæc principia *demonstrationis,* sed *constructionis.* Necessaria tamen sunt, propterea quod ne prima quidem theoremata demonstrari possunt sine figuræ constructione. Nam ex constructione, id est, ex generatione sola cognoscuntur constructi affectiones. Postulat ergo Euclides ab initio, *duci et produci posse lineam rectam;* et *quovis centro et intervallo describi circulum.*

B. Erravit igitur Wallisius, qui punctum nihil, et lineam sine omni latitudine esse opinatus est. *Ductio* enim, et *productio,* et *descriptio,* motus sunt, et propterea motus corporum; aliud enim nihil mobile est; et signant semper aliquid, et semper divisibile; etsi quantum signant, non semper inter demonstrandum consideratur.

A. Sequuntur principia alia, quæ appellantur *communes notiones.*

B. Quomodo differunt inter se *postulata,* et

communes notiones? Nam etiam *communes notiones* axiomata dicuntur. *Axioma* autem est Latine, *postulatum.* DIALOGUS II.

A. Sunt revera utraque *postulata.* Differunt autem in eo, quod in alteris postulatur *posse facere*, in alteris postulatur concedi *verum esse* aliquid, ut evidens, sine demonstratione. Sed pergamus. Definitiones secundi et tertii Elementi, quæ sunt nominum tantum impositiones, accuratæ sunt, nisi quod definitio quarta Elementi tertii non sit definitio, sed *axioma,* sive suppositio qua notum supponitur, nimirum a puncto ad lineam rectam brevissimam esse perpendicularem. Similiter definitiones Elementi quarti, sunt nominum ad placitum impositiones, ideoque reprehendi non possunt. Ad Elementum quintum definitio prima est, *pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur majorem.*

B. Sed si minor non metiatur majorem, num ideo non erit illius pars?

A. Erit. Sed loquitur Euclides hoc loco de *parte aliquota;* id est, cum major dividitur in partes æquales, illarum una hæc intelligitur. Sed cum esset in geometria loquendum sæpe de *mensura* et *mensuratione*, deerat tamen hactenus definitio *mensuræ.* Definivit partem per definitionem mensuræ. Nam *mensura est magnitudo magnitudinis, minor majoris vel non minoris, cum minor, ipsi applicata semel vel pluries, ipsam æquat.*

B. Omnes quidem omnia per applicationem metiuntur; in corporibus consistentibus mensurandis *ulna, bracchio, pede* utuntur; in fluidis, *vasibus.* Illo nempe spectant, quod dixisti supra, locum mensuræ in mensurati loco quoties conti-

DIALOGUS II.

netur invenire. Illa enim æqualia sunt, quæ, salva quantitate, idem capiat locus. Sed et quæ æqualia non sunt, idem capit locus. Sic enim existimant non modo Wallisius, sed etiam metaphysicorum et scholasticorum fere tota natio.

A. Quo fundamento autem id putant?

B. Corpora dicunt eadem existentia modo rarefieri, modo condensari: minus autem esse, quanquam idem, condensatum corpus, quam rarefactum. Fieri itaque potest ut duo corpora inæqualia, quorum unum sit magis, alterum minus condensatum, in eodem loco sint successive.

A. Nonne locus locato congruere accuratissime dicitur? Nonne Euclides æqualia esse dicit, quæcunque sibi congruunt?

B. Est axioma octavum Elementi primi.

A. Quoniam igitur corpus utrumque successive loco eidem congruit, id est, loco eidem est æquale: erunt quoque duo illa corpora, per communem notionem primam, inter se æqualia.

B. Ita videtur. Quid autem est quod tot non modo philosophos, sed etiam mathematicos ipsosque professores, potuit in errorem hunc turpissimum inducere?

A. Accidit plerisque hominibus circa ea quæ ignorant, idem quod pecoribus. Ut enim pecora ductorem gregis primum erumpentem quacunque, ignara periculi, sequi solent, ita et homines in quodlibet absurdum a principe opinionis ducti facile incidunt.

B. Sed quid fefellit ipsos primos?

A. Falere primos solet, quod cum sustinuerint dogma aliquod, verisimile quidem, sed tamen falsum, et a dissentientibus difficultatibus urgentur

quas superare nesciunt, ne errasse videantur, fingunt possibilia esse quæ non sunt possibilia, vel dicunt aliquid quod non possit intelligi; recipitur tamen ab iis, qui malunt sine molestia habere quod dicant, quam cum molestia quod sentiant.

B. Videntur autem intelligere aliquid per rarefactionem et condensationem: alioqui non insultarent in eos qui sentiunt contrarium.

A. Puto, hoc sentiunt; in tumescenti aliquo corpore, nihil illi admisceri corporis adventitii: ut, verbi causa, bulliente aqua nihil admisceri putant aeris, sed ipsam aquam, eandem existentem, in majus extendi spatium loci. Sed ipsos, qui doctrinam hanc de rarefactione et condensatione docere solent, unico tantum argumento cessuros credo: nimirum, si qui stipendium Wallisio, dispensatores beneficii Saviliani, soluturi sunt, pro solidis numerarent illi totidem semisolidos, dicerentque solidos esse frigore, cui fortuito expositi fuissent, condensatos, non puto crederet Wallisius id fieri (quicquid alias scribere soleat) potuisse.

Secunda definitio est *multiplicis;* proba, nec difficilis. Tertia est *rationis;* satis inepta. *Ratio*, inquit, *est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam habitudo.*

B. Intelligo eos qui loquuntur de ratione, sed de habitudine loquentes non intelligo. *Habitudo* ab *habendo* dicitur. Quæro igitur, quid est quod hoc loco *habet;* quid quod *habetur;* et an ratio dicatur *habitudo*, ab eo quod ipsa *habet* aliquid, vel ab eo quod *habetur;* et siquidem *habeat*, quid sit quod *habet;* sin *habeatur,* a quo *habetur.* Quæ omnia sunt inepta.

A. Vox illa *habitudinis* a formulis loquendi orta

est. Solebant enim geometræ, cum vellent rationum similitudinem explicare, Græci quidem hac voce uti οὕτως ἔχει, Latini vero hac, *ita se habet:* quam loquutionem admisit Euclides in definitionem suam rationis, quam ideo appellavit ποιὰν σχέσιν, et Latini *certam habitudinem.* Et credibile est, si Græci vulgo pro οὕτως ἔχει dixissent οὕτως ἐστιν, Euclidem definiturum fuisse rationem per ποιὰν οὐσίαν, et Latini per *certam essentiam.*

B. Quænam autem est *rationis* definitio vera et accurata?

A. Ratio est relatio antecedentis ad consequens secundum magnitudinem.

B. Quid sit antecedens et quid consequens intelligendum est ex definitione *relatorum;* sed tamen non cognoscitur ex hac definitione *rationis* quantitas.

A. Neque ex definitione trianguli, ipsius trianguli quantitas.

B. Dic ergo quomodo computandæ sint rationum quantitates?

A. Primo, non omnis ratio est quanta.

B. Mirum hoc dicis, *rationem* aliam esse *quantam,* aliam *non quantam.*

A. Ita est; nam ratio inæqualis ad inæquale quantitatem habet. Sed ratio æqualis ad æquale quantitatem non habet.

B. Quare autem non habet quantitatem?

A. Quia nempe ratio non est simpliciter magnitudo, sed cum relatione ad aliam magnitudinem; juxta quam relationem una inæqualitas, id est, una ratio inæqualium, alia major, alia minor esse potest; una autem æqualitas non potest. At ea, quorum alia majora, alia minora esse possunt,

quanta sunt; cætera non sunt. Absurdum enim esset rogare quanta est æqualitas; contra vero rogare quanta sit inæqualitas, absurdum non est. DIALOGUS II.

B. Sed Wallisius in eodem esse dicet prædicamento tum æqualitatem tum inæqualitatem; et proinde, si altera earum sit quantitas, alteram etiam esse quantitatem.

A. Quidnam est illud *prædicamentum?* An domus aut apotheca aliqua, unde omnes æqualitates inæqualitatesque, quando usus erit, depromendæ reconduntur?

B. *Prædicamentum* est vocabulorum series, secundum amplitudinem significationum ab Aristotele ordinata.

A. Scio, scio has nugas; nimirum, ex nominum, arbitrio Aristotelis, ordinatione naturam rerum æstimare solere eos, qui ingenio sapiunt alieno; cum, e contra, ex cognitione naturæ disponi debeant ipsa nomina.

B. Sed instat Wallisius contra vim argumenti hoc modo: *Si ratio æqualitatis ob eam causam quantitas non sit, quod una æqualitas non est magis æqualitas quam alia; etiam angulus rectus quantitas non erit, quia unus angulus rectus nec magis est angulus, nec major, quam alius rectus.*

A. Poterat etiam arguere sic: quia numerus sex nec major nec minor esse potest, quam alius numerus sex, numerus senarius non erit quantitas. Sed ratiocinatio utraque vitiosa est. Nam in genere quantitatis, tam quæ inter se æqualia quam quæ inæqualia sunt, quantitatem habent; ut angulus rectus, quia angulus in genere, et numerus senarius, quia numerus in genere est quantitas. Ratio autem in genere quantitas non est, sed

DIALOGUS II.

relatio, sive comparatio. Potest ergo una ratio quanta esse, ut tamen alia quanta non sit.

B. Verum dicis. Sed ratio æqualitatis ideo videtur esse quantitas, quia et ipsa major vel minor quam alia ratio esse potest. Est enim ratio 5 ad 5, ratio æqualitatis; eademque major quam ratio 5 ad 6, et minor quam ratio 5 ad 3.

A. Aliud est tantum esse *absolute* et *solitarie* sumptum, aliud *comparative*. Ratio quidem æqualitatis major esse potest quam ratio quantitatis minoris ad majorem, ut tamen ipsa quantitas non sit. Exempli causa: etiamsi 0 nihil sit, ratio tamen 0 ad 0 major est quam ratio 0 ad 0-1, id est quam 0 ad minus quam 0.

B. Hoc quidem verum est in numeris vel quantitatibus fictis. Sed putasne tu rationes censendas esse eodem modo quo numeri ficti?

A. Puto.

B. Attamen quomodo fieri potest, ut ratio minoris ad majus quantitas sit, cum ratio quæ sit illa major, nempe ratio æqualitatis, quantitas non sit?

A. Cum ratio sit quantitatum comparatio, expositis duabus quantitatibus inæqualibus dupla oritur comparatio; altera minoris ad majorem, in qua quæritur quantum minor a majore superatur; altera majoris ad minorem, qua quæritur quantum major minorem superat. Itaque ratio inæqualitatis est duplex, altera *defectus*, altera *excessus*. Sicut autem numeri finguntur ab 0, seu nihilo, superari iisdem intervallis quibus ipsum 0, seu nihil, superatur a numeris non fictis: ita ratio *defectus* superatur a ratione *æqualitatis* iisdem intervallis, quibus ipsa superatur a rationibus *excessus*. Et per con-

sequens, ratio æqualitatis superans rationem *defectus*, non tam rationem *defectus* superat quam *defectum* rationis, id est, *defectum* magnitudinis qua æquari possit cum eo quicum comparatur.

B. Videris hoc velle, in comparatione rationum promiscue computari *excessus* et *defectus:* similiter ac si quis habens sui æris viginti libras, et alieni totidem, numeraret indistincte summam quadraginta librarum, cum deberet numerare nihil.

A. Ita est.

B. Sed illud, *rationem defectus esse defectum rationis,* ad mathematicorum aures accedet insuetum.

A. Credo tibi hoc. Attamen verum esse facile agnosces, si animadvertas, quando duæ rationes, utraque minoris ad majorem, componuntur, rationem fieri minorem.

B. Verum est, et propterea necesse, *ut ratio defectus sit defectus rationis.* Quantitates enim omnes ejusdem generis compositæ, quantitatem faciunt majorem. Etiam defectus si defectui addatur, fiet defectus major, et tamen ratio facta est minor; ex quo manifestum est quod dixisti, *rationem defectus esse defectum rationis;* ut qui æs alienum æri addit alieno, tanto fit pauperior quanto plus habet æris alieni.

A. Recte capis. Sciendum præterea est, magnitudines rationum, tam *defectus* quam *excessus*, determinari per magnitudinem *differentiæ;* idque dupliciter. Potest enim differentia considerari vel *absolute,* ut cum dicimus comparando 6 et 3, majorem esse 6 quam 3 tribus unitatibus; quæ differentia est numerus absolutus: vel *comparative,* ut cum dicimus majorem esse 6 quam 3 sui ipsius

dimidio. Unde etiam dividi solet in geometricam, quæ a geometris simpliciter ratio appellatur, et arithmeticam. Itaque 6 ad 3, et 7 ad 4, sunt eadem ratio arithmetica, propter differentiam eandem 3 absolute sumptam. Sed in ratione geometrica, 6 ad 3 et 8 ad 4 eadem est ratio, propterea quod utrobique differentia est antecedentis dimidium. Cæterum ratio arithmetica non est habita ab omnibus pro specie rationis; fortasse quia ad illam quæ est in definitione rationis apud Euclidem, *habitudinem quandam*, non potuit accommodari. Pappus autem rationis tredecim facit species, quarum ratio arithmetica est una.

B. Perge legere.

A. Definitio quarta: *Proportio*, Græcis ἀναλογία, *est rationum similitudo.*

B. Quænam est differentia inter rationem *similem*, *æqualem*, et *eandem?*

A. Nulla omnino. Nam rationes, 2 ad 4, et 3 ad 6, *eædem* sunt, et *similes*, et *æquales.*

B. Quomodo differunt inter se *proportio* et *ratio*, sive ἀναλογία et λόγος?

A. Λόγος quidem, sive ratio, est comparatio quantitatum; proportio vero, sive ἀναλογία, est comparatio rationum, sive potius repetitio rationis ejusdem in aliis quantitatibus. Exempli causa; 4 ad 3 est ratio, et 8 ad 6 eadem ratio in aliis quantitatibus. Sed ambæ rationes, 4 ad 3 et 8 ad 6, sunt ἀναλογία. Quinta: *Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se mutuo superare.* Proba est, si recte intelligatur. Quæ enim multiplicata se mutuo possunt superare, homogenea sunt; eodemque genere mensuræ mensurabilia; ut longitudines longitudinibus, superficies superficie-

bus, solida solidis. Quæ vero heterogenea sunt, diverso genere mensuræ mensurantur. Sin lineæ pro minutissimis parallelogrammis considerentur, ut ab iis considerantur qui methodo demonstrandi utuntur ea, qua Bonaventura Cavalerius in doctrina *Indivisibilium* usus est, habebunt inter se rationem etiam *lineæ rectæ* et *superficies planæ;* poterunt enim tales lineæ multiplicatæ quamlibet finitam superficiem planam superare.

B. Mihi tamen definitio hæc *rationem inter se habentium,* ne sic quidem videtur accurata; habent enim rationem inter se mensuræ longitudinis, temporis, et motus; et possunt multiplicatæ se mutuo superare. Attamen inter lineam et tempus, vel inter lineam et motum, rationem esse dici non potest.

A. Potest quidem non minus dici, quam *lineam esse tempus.* Sed Archimedes aliique geometræ non pauci, cum tempus exponere volunt, *esto,* inquiunt, AB *tempus:* quos ego culpare, cum omnes loquutionem illam bene intelligant, non auderem.

B. Wallisius auderet.

A. Definitio sexta est *ejusdem rationis,* quæ sic se habet.

B. Siste gradum paulisper. Nonne analogiam modo definivit Euclides, esse similitudinem rationum? *Similitudo* autem *rationum* et *eadem ratio* eadem est res. Videtur ergo mihi *analogiam* sive *proportionem* hoc loco iterum definire.

A. Minime. Nihil hic peccatur. Quid enim, si quis *hominem* definiret esse *animal rationale,* apud nescios quid *animal rationale* esset? Itaque in definitione hac sexta illud agit, ut *proportionem,* sive *eandem rationem,* per generationem ejus defi-

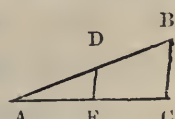
niat. Quod ni fecisset, nihil inde ut a principio demonstrasset.

B. Quid ita? Definitio circuli apud Euclidem, non est descriptio *generationis* circuli, sed *generati:* at nihilo minus constructio trianguli æquilateri inde ab Euclide demonstratur.

A. Demonstratio illa dependet quidem ab ea definitione: sed ipsa definitio dependet a postulato tertio, nempe, quo gratis sumitur *posse circulum quovis describi intervallo.* Jubet ergo, ad constructionem trianguli æquilateri, describi circulum; quod quo modo faciendum sit, definitio Euclidea non docet. Quomodo enim inveniri medium illud punctum potest, nisi prius descriptus sit ipse circulus? Vidit ergo Euclides definitionem *analogiæ,* nisi ostenderet quomodo *eædem rationes* fierent, inutilem fore ad sequentia. Itaque definitionem per generationem addidit hanc: *In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, et tertia ad quartam, cum primæ et tertiæ æque multiplicia, a secundæ et quartæ æque multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque, vel una deficiunt, vel una æqualia sunt, vel una excedunt, si ea sumantur quæ inter se respondent.* Sed invenire, per hanc definitionem, hujusmodi quatuor quantitates impossibile est: quia multiplicatio per omnes numeros, cum infiniti sint, est impossibilis. Non est ergo definitio hæc, sed hypothesis.

B. Recte quidem dicis; est autem hypothesis illa vera. Vera inquam est, sed non principium, quia demonstrabilis est, et ab Hobbio (cap. xiii. art. 12, libri DE CORPORE) demonstrata; sed a definitione *ejusdem rationis* per generationem,

diversa est hæc Euclidis. Manifestum enim est duas quaslibet *velocitates* duorum corporum motorum, habere inter se certam aliquam rationem, et quidem, dum velocitates illæ eædem sunt, eandem. *Velocitatem* autem definit Hobbius, *potentiam esse mobilis in tempore determinato determinatam longitudinem permeandi.* Ex his manifestis generationem colligit *ejusdem rationis.* Dicit enim, *si duo mobilia, utrumque velocitate invariata, percurrant duas longitudines tempore eodem, eas longitudines rationem habere inter se eandem quam habent velocitates ipsæ:* et rursus, *si duo mobilia utrumque eadem invariata velocitate percurrant duas longitudines, habere eas eandem inter se rationem, quam habent inter se tempora quibus percurruntur.* Quibus positis, sint duo mobilia ad punctum A, moveanturque æquabili velocitate per AB, AC. Et velocitatem quidem unius repræsentet



AB, velocitatem autem alterius repræsentet AC. Venient ergo alterum ad B, alterum ad C, in eodem tempore AC, propterea quod velocitates amborum determinantur per spatia quæ eodem tempore percurrunt. Similiter, si in parte temporis AC, iisdem servatis velocitatibus, alterum veniat ad D, alterum ad E, rursus erunt spatia percursa AD et AE ut velocitates eædem, id est, ut AB ad AC. Eodem modo, si mobile idem veniat ad B in tempore AC, veniet ad D in parte illius temporis, puta in AE, quæ sit spatio AD homologa. Nec tantum verum hoc est in motu, sed etiam in omni genere causationis, ubi causa æqualibus temporibus æqualia semper efficit. Itaque *eandem rationem* (cap. xiii. art. 6, libri DE CORPORE) sic definivit*: Ratio geo-*

metrica rationi geometricæ eadem est, quando causa aliqua eadem æqualibus temporibus æqualia faciens, rationem utramque determinat.

A. Definitio sane hæc accuratissima est, generationemque proportionis quasi ante oculos ponit. Sed Euclides, per suam hypothesin, rationum doctrinam in Elemento quinto solidissime demonstravit. Anne tantundem fecit Hobbius per definitionem suam ?

B. Demonstravit non modo easdem propositiones quas Euclides, sed etiam nonnullas alias non minus difficiles, ne quidem Wallisio ipso contradicente. Nam hoc solum de illis pronunciat, *non videri ipsius esse.*

A. Id est, simul et laudat et invidet. Quid scribis in pugillaribus ?

B. Noto quod in Græco pro multiplicibus ab Euclide dicitur πολλαπλάσια, et pro multiplicatione πολλαπλασιασμὸς. Nam (ἀναλόγως) διπλασιασμὸς deberet verti *duplicatio*, et διπλασιὸς, sicut et διπλασίων et διπλασιασθεὶς, duplus vel duplicatus.

A. Quid ergo ?

B. Magnam facit Wallisius differentiam inter rationem, duplam et duplicatam, triplam et triplicatam, etc., tum in *Elencho* contra Hobbium, tum in tractatu Elenchtico contra Meybomium.

A. Tanto est indoctior. Sed ego tibi negotium illud facile expedibo. Euclides enim vocibus illis διπλασιὸς et διπλασίων pro eadem re promiscue utitur, sicut Latini vulgo *duplum* et *duplicatum.* Voce διπλασίων, etiam in proportionibus utitur Euclides pro dupla. Lege propositionis ultimæ Elementi noni textum Græcum.

B. ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἄριθμοι ἐξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ

διπλασίονι ἀναλογίᾳ ἕως οὗ ὁ σύμπας πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τίνα, ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

A. Quid significat hoc loco ἐν ἀναλογίᾳ διπλασίονι? Nonne significat proportionem sive similitudinem rationum quæ cernitur in numeris ab Euclide expositis, nimirum his, 1, 2, 4, 8, 16, etc.: in quibus numerus posterior prioris semper est duplus? Nam si de ratione ipsa duplicata intelligeretur, numeri 1, 2, 4, 8, 16, etc., non magis dicendi essent esse ἐν ἀναλογίᾳ διπλασίονι, quam 1, 3, 9, 27, 81, etc. Itaque propositio hæc Euclidis de numero perfecto, in omni progressione geometrica non minus vera esset, quam in progressione hac per duplicationem. Necesse ergo est ut voce hac διπλασίων usus sit Euclides pro duplicato numero, id est, pro duplo, non pro duplicata ratione. Igitur ratio 1 ad 2 non est subdupla ratio, sed ratio simpli ad duplum, sive semissis ad integrum; neque inverse, ratio 2 ad 1 est ratio dupla, sed ratio dupli ad simplum, sive integri ad semissem.

B. Accurate hæc. Διπλασίων ergo idem est quod duplus, ut apud Euclidem ipsum (Elem. iii. prop. 20). Voces autem *subduplus, subtriplus,* etc., barbaræ sunt, et ab iis inventæ, qui, cum in tenebris versarentur, cupiebant quoquo possent modo sese promovere. Ostendisti jam διπλασίων apud Euclidem significare in numeris duplum. Ostende etiam quod significat apud eundem in rationibus duplicatum.

A. Ecce in definitione Elementi quinti decima, sic dicit Euclides: ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον: ubi rationem rationi sibi æquali additam,

DIALOGUS II.

id est, rationem multiplicatam per duo, id est, rationem duplicatam, vocari vides διπλασίονα.

B. Video vocem illam utrumque significare apud Euclidem, tum duplum, tum duplicatum, quemadmodum apud authores Græcos cæteros omnes. Video etiam vocabula Latina duplum et duplicatum idem significare, ut et Græca διπλοῦς, διπλάσιος, διπλασίων, διπλασιαθεὶς. Sed cur noluit Euclides uti voce διπλάσιος, cum potuit, et ad evitandum ambiguitatem videtur debuisse, nondum perspicio.

A. Quænam esse potest ambiguitas in vocibus quæ idem significant ubique. Sunt qui διπλοῦν distinguunt a διπλασίων, hoc numerum, illud quantitatem continuam respicere dicentes. Sed inter διπλάσιον et διπλασίονα differentiam nullam observant, neque grammatici neque mathematici Græci. Credo equidem διπλασίων nomen rectum factum esse a nomine plurali genitivo διπλασίων, cujus rectus singularis est διπλάσιος; itaque in propositione ultima Elementi noni, ἐν ἀναλογίᾳ διπλασίονι, idem esse quod ἐν ἀναλογίᾳ διπλασίων, et in hac definitione decima, λόγον διπλασίονα idem esse quod λόγος διπλασίων. Nihil ergo est difficultatis in eloquutione mathematicorum veterum. At recentiores difficultatem sibimet ipsis creaverunt ex vocibus barbaris *subduplum, subtriplum,* etc.: quippe qui non meminerant ex duplicatione vel etiam multiplicatione aliquid fieri posse aliquando minus. Nam quantitates fictæ, quales sunt 0-1, 3-5, et aliæ, id est, minores quam nihil; quanto plus multiplicantur a numero vero, tanto minores fiunt.

Definitio septima est proportionalium; accurata, sed et facillima. Est enim, definita jam *eadem ratione,* tantummodo nominatio eorum quæ rationem

inter se habent. Octava sicut sexta, demonstrabilis est.

B. Quomodo rationem majorem definis tu?

A. Rationem quidem *majorem, rationem esse* dico *majoris antecedentis ad idem consequens, vel ejusdem antecedentis ad consequens minus. Rationem* autem *minorem esse rationem minoris antecedentis ad idem consequens,* vel ejusdem antecedentis ad consequens majus.

B. Accurate.

A. Nona, definitio non est, sed propositio gratis assumpta, nempe, *proportionem in tribus terminis paucissimis consistere;* cum tamen accurate loquendo, consistat in quatuor paucissimis. Omnis enim ratio consistit in duobus terminis paucissimis, et omnis proportio in duabus paucissimis rationibus. Quando vero duæ quantitates mediæ æquales inter se sunt, id non numerum minuit terminorum. Elementi hujus quinti definitiones decem reliquæ accuratæ sunt.

B. Transeamus ergo ad definitiones Elementi sexti.

A. Sunt illæ, excepta quinta, quæ et ultima est, omnes accuratæ. Nam illa quinta, cum et demonstrari possit et demonstratione indigeat, neque pro definitione, neque pro principio demonstrationis haberi debet. Est autem hæc; *ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se aliquam effecerint rationem.*

B. Demonstra, quoniam demonstrabile esse dixisti, ex multiplicatione inter se antecedentium duarum rationum, et ex multiplicatione inter se consequentium, existere ipsarum rationum unius ad alteram additionem.

DIALOGUS II.

A. Rationes addendas propone quas vis.

B. Rationi 2 ad 3 adde rationem 4 ad 5, per multiplicationem.

A. Multiplico antecedentes, 2 et 4, in se, qui faciunt 8; deinde multiplico in se consequentes 3 et 5; producitur 15. Probandum est rationem 8 ad 15, æqualem esse ambabus rationibus 2 ad 3, et 4 ad 5. Nam 4 multiplicans 2 et 3, facit 8 et 12. Est ergo ratio 8 ad 12 eadem quæ 2 ad 3. Rursus, 3 multiplicans 4 et 5, facit 12 et 15. Est ergo 12 ad 15 eadem ratio quæ 4 ad 5. Sed in his numeris 8, 12, 15, ratio primæ ad ultimam æqualis est ambabus rationibus simul 8 ad 12 et 12 ad 15, hoc est, ambabus rationibus 2 ad 3 et 4 ad 5. Itaque demonstravi rationem rationi, per multiplicationem in se antecedentium amborum et amborum consequentium, additam esse, ut imperasti.

B. Quomodo autem rationes altera alteri aliter addi possunt?

A. Si, nempe, ut antecedens est ad consequentem unius rationis, ita fiat consequens alterius rationis ad quartam. Nam si rationi 2 ad 3 addenda sit ratio 4 ad 5, fiat ut 4 ad 5, ita 3 ad aliam; prodibit $3\frac{3}{4}$. Ponantur ordine 2, 3, $3\frac{3}{4}$. Ratio ergo 2 ad $3\frac{3}{4}$ est summa rationum 2 ad 3 et 3 ad $3\frac{3}{4}$. Est enim ratio 3 ad $3\frac{3}{4}$, eadem quæ ratio 4 ad 5. Et siquidem tres quantitates, 2, 3, $3\frac{3}{4}$, multiplicentur omnes per 4, prodibunt 8, 12, 15, iidem numeri qui facti erant per multiplicationem.

B. Recte demonstratum est. Sed nonne sicut ratio rationi additur per multiplicationem, ita subductio unius rationis ex alia fieri potest per divisionem?

A. Etiam. Nam, exempli gratia, a ratione 8 ad 15 sit subducenda ratio 4 ad 5. Divido ambos

numeros 8 et 15 per 4; unde fiunt quotientes 2 et $3\frac{3}{4}$, qui sunt in ratione 8 ad 15. Rursus, divido 15 per ambos numeros 4 et 5; et fiunt quotientes $3\frac{3}{4}$ et 3, qui sunt in ratione 12 ad 15. Positis ergo ordine numeris 8, 12, 15, si a ratione 8 ad 15 subtrahatur ratio 12 ad 15, id est, ratio 4 ad 5, relinquetur ratio 8 ad 12, sive ratio 2 ad 3.

B. An non ratio a ratione subduci potest etiam sine his divisionibus?

A. Potest. Nam si fiat ut consequens rationis subducendæ ad antecedens suum, ita consequens rationis integræ ad quartam, ratio, quæ post subductionem relinquitur, erit ratio antecedentis ad illam quartam. Verbi gratia; si a ratione 8 ad 15 auferenda sit ratio 4 ad 5, fiat ut 5 ad 4 ita 15 ad quartam, quæ erit 12. Positis ergo ordine 8, 12, 15; si a ratione 8 ad 15 auferatur ratio 12 ad 15, id est, ratio 4 ad 5, relinquetur ratio 8 ad 12, id est, ratio 2 ad 3.

B. Clarissime.

A. Animadverte quam sit ab impropriet ate verborum pronum hominibus prolabi in errores circa ipsas res. Sicut enim tu pro composita ratione sumpsisti rationem quantitatum compositarum, ita Wallisius aliique plurimi rationem duplorum sumunt pro ratione dupla, decepti ab improprietate eloquutionis.

B. Miror autem quod tam clamose contendat in *Elencho* Wallisius, compositionem rationum non additionem sed multiplicationem dicendam esse.

A. Tam diu autem mirari non desines, quam diu ab homine, qui ea scripsit quæ hactenus legimus, quicquam expectabis accuratum.

B. Ex hac rationum compositione manifestum

DIALOGUS II.

est, expositis quotcunque quantitatibus, rationem primæ ad ultimam æqualem esse rationibus omnibus primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, et sic deinceps usque ad ultimam, simul sumptis.

A. Est ita ut dicis; et ejus rei causam ostendit ipsa operatio. In quantitatibus enim tribus quibusvis, A, B, C, dubitari non potest quin exposita A ad expositam B rationem habeat A ad B; et similiter, exposita B ad expositam C rationem habet B ad C. Quare ratio A ad C composita est ex duabus partibus, nimirum, ex ratione A ad B et ratione B ad C. Et siquidem essent quatuor quantitates, A, B, C, D; ratio A ad D, propter eandem causam, componeretur ex rationibus A ad B et B ad C et C ad D.

B. Video ita esse. Sed hoc melius aliquanto videtur mihi demonstrasse Hobbius in libro DE CORPORE (cap. xiii. art. 13): definitionem deducens a doctrina de motu.

A. Sed doctrina de motu paucissimis cognita est; cum tamen natura omnia, non modo quæ physicæ, sed etiam quæ mathematicæ contemplationis sunt, per motum transigit. Primus qui scripsit de motu quod dignum lectu erat, fuit Galilæus. Progrediamur jam ad Elementum septimum; ubi primo definitur *unitas*, sed, ut modo vidisti, male; deinde *numerus*, contra sententiam Wallisii, optime. Tertia definitio est *partis*, (subaudi aliquotæ), quod sit *majoris quantitatis mensura;* et recte, si per *partem aliquotam* intelligatur *pars aliquota numeri*. Alioqui *pars* in definitione *mensuræ*, non *mensura* in definitione *partis* ponenda est. Quinta hæc est: πολλαπλάσιος ἐστὶν ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος. Latini qui sic vertunt, *multiplex est*

major minoris, cum majorem metitur minor, anne distinguunt inter *multiplex*, (quod est *multiplicatum*), et *multiplum ?*

B. Non certe hoc loco; neque Græci inter διπλάσιον et διπλασίονα. Nam si fecissent, non πολλαπλάσιον dixisset Euclides, sed πολλαπλασίονα.

A. Cætera bene se habent.

B. Transeamus ergo ad definitiones Elementi decimi.

A. Sunt et illæ accuratæ omnes.

B. Antequam progrediare, velim dicas mihi quo fine, sive cui bono Euclides theoremata illa Elementi decimi difficillima nobis demonstravit. Cæteras enim geometriæ partes omnes usui esse video in communi vita, aut ad ædificandum, aut ad navigandum, aut ad machinas, aut ad calculum temporis, aut ad picturam, aut ad philosophiam naturalem, aut denique ad aliquid. Cui vero rei linearum hæc irrationalium cognitio inserviat, nondum cerno. Scio quæ pulchra sunt, difficilia esse; sed ut vicissim, quæ difficilia sunt, etiam pulchra sint, necesse non est.

A. Quo fine hæc demonstravit certe nescio; sed quin in omni re ingenii splendor ipse per se pulcherrimus sit, dubitandum non est. Attamen si ab ipso opere de consilio opificis conjicere liceat, voluisse puto Euclidem, quantum potuit linearum omnium in figuris, certa et cognita lege descriptarum, rationes convertere in rationes numerorum. Quod si natura fieri passa esset, computatio quælibet facillima facta esset, nimirum, in tabulas digestis omnium rerum rationibus.

Restant definitiones Elementi xi.; illæ quoque ad scientiarum severitatem exactissimæ.

DIALOGUS II.

B. Quid? Tune sphæram, conum, et cylindrum bene definiri existimas per motum semicirculi, parallelogrammi, et trianguli super quiescentes axes?

A. Quidni?

B. An stellarum fixarum vel cujuslibet planetæ sphæram descriptam fuisse putas a conversione semicirculi? Similiter, axes horum corporum, qui definiuntur ab Euclide per *rectam lineam quiescentem;* nonne axes sunt, etiamsi non quiescerent, sed quocunque ferrentur corpora ipsa, quorum axes sunt, ferrentur una?

A. Tu firmum hoc argumentum esse credis?

B. Ita. Et eodem usus est Wallisius.

A. Professorne Savilianus reprehendere Euclidem ausus est?

B. Non Euclidem reprehendit, sed Hobbium.

A. Etiam Euclidem, si modo eodem argumento contra utrumque uti potuit.

B. Esto. Sed cum lineam definisset Hobbius esse corporis, cujus nulla consideratur quantitas, moti via: *quid opus est,* inquit Wallisius, *notione* motus, *ut quid sit linea intelligatur? Annon lineæ corpori quiescenti insunt,* &c.? Pariter ego dico tibi, quid opus est nominare motum, ut intelligatur quid sit sphæra? Annon potest concipi quiescens semicirculus in sphæra?

A. Si ille Hobbium, etiam tu Euclidem recte reprehendisti. Sed errastis ambo, nescientes naturam definitionis. Nonne sunt definitiones scientiarum principia?

B. Sunt.

A. Et omnis scientia a cognitione causarum derivanda?

B. Verum.

A. Ergo principium scientiæ est cognitio causæ.

B. Etiam.

A. Sequitur ergo cognitionem causæ contineri debere in definitione.

B. Fateor.

A. Itaque optime definiunt illi, qui generationem rei in definitione explicant.

B. Etiam hoc concedo ; et in Euclidis sphæræ, coni, et cylindri definitionibus, generationes illorum corporum video, quanquam non similiter definierat circulum.

A. At circulum describi posse, qui describi nisi per motum non potest, inter postulata ut rem notam gratis sumsit.

B. Saltem dicere debuit Euclides, sphæram esse solidum *quale* fit, potius quam *quod* fit, ex circumductione semicirculi. Nulla enim est sphæra, quæ per circumductionem facta est a natura.

A. Qui figuras definiunt, ideas quæ in animo sunt, non ipsa corpora respiciunt ; et ex iis quæ imaginantur *fieri*, deducunt proprietates factorum similium, a quocunque et quomodocunque facta sunt.

Vidimus jam principia geometriæ tradita ab Euclide : quorum aliqua quidem, sed pauca minus accurata mutavimus ; reliqua ut irreprehensibilia partim præterivimus, partim confirmavimus.

B. Revertamur ergo ad Wallisium, et unde digressi sumus, nempe ad Caput decimum. Nam, si bene memini, eramus ad philologicorum et Capitis noni finem, tunc cum digredi incepimus.

A. Sed differamus hæc in triduum, quo tempore lectis arithmeticæ ejus quæ restant, ea tantum quæ

materiam colloquio nostro subministrare possunt, discutienda deligam, ne ea quæ utilitatem nullam, molestiam nimiam nobis allatura sunt, sæpius repetamus.

DIALOGUS TERTIUS.

B. Legistin' reliqua arithmeticæ Wallisianæ?

A. Ita.

B. Plenane videntur tibi, sicut antecedentia, erroribus?

A. Minime. Sunt enim pleraque ex iis arithmeticæ libris desumpta, qui pueris ediscendi scripti sunt; cætera aut Ougthredi sunt, aut maxima ex parte falsa.

B. Sed quæ ab aliis habuit, ipse solus demonstravit.

A. Neque hoc quidem. Verum hæc inter legendum considerabimus accuratius. In Capite decimo, numerationem in notis numeralibus vulgaribus explicat, et cujusque notæ tum proprium, tum loci valorem, tam in fractionibus decimalibus quam in integris, exponit; ostenditque, sicut a loco *unitatum* ad loca præcedentia proceditur per decuplationem, ita a loco eodem ad loca sequentia proceditur per subdecuplationem. Quarum quidem rerum demonstratio non est, sed constitutio fuit arbitraria. Explicatio autem et brevis et perspicua et accurata a magistro expectanda erat. Et primo quod ad numerationem periodos adhibeat, period-

umque per loca tria potius quam per quatuor aut alium numerum finiat, non videtur ad artem arithmeticam pertinere.

B. Sumamus numerum quemlibet; eundem, verbi gratia, quem ille sumpsit, 2, 468, 013, 579. Quomodo numerus hic verbis proferendus est?

A. Recte *proferendus,* non ut Wallisius loqui solet, *efferendus.*

B. Quomodo, inquam, proferendus est sine periodis?

A. Periodos utiles esse non negavi; sed quæro, cur locis ternis definiuntur?

B. Si notarum valorem verbis enuntiaveris, videbis ipse.

A. Significant notæ illæ *duo millia millium millium, quadringenta sexaginta octo millia millium, tredecim millia et quingenta septuaginta novem.*

B. Nonne vides verba tua distinguere te, quemadmodum ipsæ notæ per loca terna distinguuntur?

A. Ita, sed Latine. Distingue jam tu easdem notas per nomina numeralia, si potes, Græce.

B. Possum. *εἴκοσι καὶ τέσσαρες μυριάδες μυριάδων, ἑξακισχίλια ὀκτακόσιαι καὶ μία μυριάδες, τρισχίλια, πεντακόσια, ἑβδομηκοντὰ ἔννεα.*

A. Sed hæ voces distinguunt notas numerales non per loca terna, sed per quaterna, hoc modo: 24, 6801, 3579. Nihil igitur ad scientiam arithmeticam, quæ universaliter omnibus gentibus eadem est, sed an diversas gentium dialectos pertinet. Deinde, cum dixisset, *cyphræ quæ locis supremis ponuntur nulli prorsus sunt usui, nullius saltem necessitatis, sed redundant potius; tantundem enim significant* 0001, 001, 01, et 1: subjungit ridicule, *fieri quidem nonnunquam potest ut elegantiæ*

DIALOGUS III.

gratia, vel quo numerorum supputandorum collatio commodior fiat, ut in apposito exemplo, ejusmodi redundantes cyphræ scribantur;

Libræ	Solidi	Denarii
13	12	10
24	08	06
05	04	01

Næ, ille elegantiæ æstimator imperitus est, qui inutiles istas ciphras ad supplendas lacunas præfigere elegantiæ esse judicat. Deinde paginas duas insumit ad declarandum naturam fractionum decimalium; quod etiam imperitiæ est. Cum enim locorum valores in integris procedant a loco *unitatum,* semper per 10 multiplicando, et fractiones decimales procedant a loco eodem *unitatum,* semper per 10 dividendo, supervacaneum erat distinguere loca dextra et sinistra. Nam posita fractione hac decimali $\frac{111}{1000}$, erunt facti, dividendo per 10, $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$, sicut integri 10, 100, 1000, facti multiplicando per 10, proportionales. Itaque tota fractio valebit $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$. Similiter fractio hæc $\frac{354}{1000}$ valebit $\frac{3}{10}+\frac{5}{100}+\frac{4}{1000}$. Miror ergo quomodo verba hic reperire potuit, quibus fere duas paginas impleret.

B. Scis eum non modo professorem geometriæ, sed etiam concionatorem esse; et propterea in quærendis verbis necessario et multum exerceri.

A. Sed cur numeros *integros, et partes decimales* conjungendas esse censuit, sicut in hoc numero fecit, quem exempli causa proponit ipse, 3579753? Cur etiam *partes* delegit 753, quæ inversæ sunt integrorum 357? Nam lectorem imperitum a veritate abducent, tamquam regula illa divisionis per 10, non esset aliter vera.

B. Cur ita fecit nescio; nisi, quia Ougthredus fractiones decimales post *unitatis* locum posuit, ut quæ fiunt a numeris post divisionem per 10, 100, 1000, etc, residuis, et separatrice linea, qua quotiens a numero dividendo separatur, distinxit, eo fine ut additionem, subtractionem, multiplicationem, et divisionem tam integrorum quam fractionis iisdem operationibus complecteretur; ideo Wallisius qui forte *quid* ab Ougthredo fieret, non *cur* fieret animadvertisset, numeros ambos integrum et fractum, conjunxit, etiam ubi non esset opus, per imitationem.

A. Verisimile est. Cur autem tot verbis ad rem tam facilem explicatu usus est, manifesta causa est quod ea, quæ scripturiebat, cruda adhuc et indigesta illi erant. Quæ autem nondum perfecte didiceris, nunquam breviter et perspicue explicare poteris. Sequitur Caput undecimum *de Notatione Algebraica.*

B. Est in eo capite quod non intelligo.

A. Ostende locum.

B. En. *Si vero*, etc.

A. *Si vero eadem unitatum multitudo*, nempe 27, *in continua proportione quadrupla disponatur, emerget quaternionum quaternio unus, et duo insuper simplices quaterniones, cum tribus residuis unitatibus.*

B. Hoc, inquam, non intelligo. Nam si jubear disponere 27 in proportione quadrupla continua, id est, in proportione numerorum 1, 4, 16; pro primo numero ponerem A, pro secundo 4 A, pro tertio 16 A; quorum summa est 21 A. Diviso ergo 27 per 21, prodibit $\frac{27}{21}$ sive $1\frac{2}{7}$, pro A. Et 4 A erunt $5\frac{1}{7}$; et 16 A, $20\frac{4}{7}$; qui numeri faciunt ag-

gregatum 27. Quod verum esse scio; sed non intelligo quomodo consistit cum uno quaternario quaternariorum, duobus quaternariis, et tribus unitatibus.

A. Nec mirum. Nam non id voluit Wallisius, sed ut numerus 27 disponeretur secundum loca ab unitate valoris continue quadrupli. Quod est verissimum. Nam si ultimus locus sit unitatum, penultimus erit quaternariorum, et tertius sedenariorum. Est autem 27 uno sedenario, duobus quaternariis, et tribus unitatibus, æqualis.

B. Video eum ita intelligendum esse; sed debuit sic dixisse.

A. Male quidem se explicuit. Ostendere enim voluit hoc loco quomodo scribendus esset numerus, si locorum valores non in ratione continua decupla, ut vulgo fit, augerentur, sed in proportione qualibet alia, ut quadrupla vel tripla; vel quod idem est, si numerus notarum esset minor quam (ut nunc sunt) novem, quomodo scriberetur 27. Et verum est numerum 27, qui in proportione decupla scribitur sic, 27, in proportione quadrupla deberi scribi sic, 123, et in proportione tripla sic, 1000.

B. Sed nullam habet ejus rei demonstrationem. Ostende igitur quare ita esse necessarium est. Et sit data proportio tripla.

A. Quoniam sicut in proportione decupla, novem tantum sunt notæ quibus utimur, et decima ciphra; ita in proportione tripla, duo tantum erunt numeri digiti, et tertia ciphra. Erit autem 1 in loco ultimo unitas; et in loco tertio, ubi recurrendum est ad 1 et ciphram, significabit 10 ternarium. Et in loco nono, 100 significabit 9, ut enim 3 in 3 facit 9, ita 10 in 10 facit 100, et in loco vicesimo septimo,

1000 valebit 27; propterea quod, sicut 3 ad 27 sunt in proportione 3 ad 9 duplicata, ita numerus valens 27, debet esse in proportione 10 ad 100 duplicata. Scribendus est ergo 27 per has notas, ut 1 ante tres ciphras significet id quod sit ex ternario in se ter multiplicato, id est, 27.

B. Si esset tantum una nota numeralis præter ciphram, quomodo scriberetur idem numerus 27?

A. Si ita esset, valor locorum procederet per rationem duplam, et recurrendum esset alternis locis ad 1 et ciphram vel ciphras. Nam 1 in ultimo loco significaret unitatem, in secundo ab unitate, 10 significaret 2, et 11 in tertio loco 3, et 100 in loco quarto 4, et 10000 in loco decimo sexto 16. Nam ut 4 in 4 facit 16, ita 100 in 100 facit 10000. Deinde 11000 in loco vicesimo quarto valebit 20; et consequenter 11001 valebit 25; 11010 valebit 26; et denique 11011 valebit 27, id est, 1 unitas, 1 binarius, 1 octonarius, et 1 sedenarius, qui simul faciunt 27.

B. Verum est. Sed nonne potest, ubi valores locorum sunt in ratione dupla, numerus 27 scribi per alias notas quam 11011?

A. Potest; sed assumenda est nota binarii. Nam sub his notis proportionis duplæ 8,4,2,1, subscribe 2,2,1,1; hoc modo $\frac{8421}{2211}$ valebit 2211, duos octonarios, duos quaternarios, et præterea binarium, et unitatem; qui numeri faciunt simul additi 27.

B. Sed quando opus erit ut paucioribus notis utamur quam novem quibus utimur. Perge legere.

A. His ita explicatis, monendum duco universam artem algebræ sive analyticæ ex hoc uno quasi fundamento dependere. Nam revera quod nobis

DIALOGUS III.

gradus, sive ascendens sive descendens, primus, secundus, tertius, etc., illud est algebristis, latus, quadratum, cubus, etc.

Concedo latus, quadratum, cubum, fundamentum esse, *cui insistit,* dicam? an contra cum Wallisio, *ex quo dependet regula algebræ?* Sed non inde dependet ars analyticæ. At ille illam, quam modo tractavit numerationem, nempe, per locorum valores in proportionibus decuplis, quadruplis, triplis, etc., algebræ fundamentum esse statuit; id quod difficile est credere, cum ante illum multi fuerint algebristæ, sed qui numerationes has novas edidit ipse primus est.

B. Nusquam tamen, quod memini, numerationibus istis in sequentibus utitur. Sed per fundamentum intelligit non illud, sed proportionum ab unitate incipientium varietatem omnem. Itaque verum est quod dicit.

A. Esto. Cur autem paulo post de veteribus loquitur algebristis, ac si id aut ignorassent aut dissimulassent, et causam ignorantiæ eorum eam esse dicit *quod arithmeticorum unum, non vero, ut oportuit,* nullum, *cum puncto geometrico compararent?*

B. Certe in *Elencho* suo contra Hobbium, multis in locis affirmat *punctum esse nihil.* Postea vero in alio libello defendens librum suum *De Angulo Contactus* et *De Arithmetica Infinitorum* contra eundem Hobbium, negat se ita dixisse. Nunc autem illum saltem sic sentire satis intelligo.

A. Video phantasiam ejus, aliis ideis omnibus deletis, solis occupatam esse symbolis. Qui enim aliter fieri potuit, ut symbola radicum numerorum etiam non quadratorum numeros appellaret sanus

et mathematicus? Qui fieri potuit, ut geometriam ab arithmetica dependere diceret, qui sciret radices numerorum quadratorum rite extractas esse demonstrari non posse, nisi per quartam propositionem Elementi secundi Euclidis pure geometricam? Denique qui potuit veterum geometrarum omnium capitibus ita insultare, ut diceret eos algebram ignorasse, idque quia nesciebant *punctum* geometris idem esse quod *nihil* arithmeticis, qui sciret si *punctum* nihil sit, neque *lineam*, neque *superficiem*, neque *solidum* quicquam esse? Præterea, considera proxima ejus verba hæc: *Non quia linea bipedalis bipedali addita facit quadrupedalem, ideo duo et duo faciunt quatuor, sed potius quia hoc, ergo illud.* Subintelligitur, *ergo geometria ab arithmetica dependet, non hæc ab illa.* Belle admodum. Dic mihi propositio illa, *duo et duo faciunt quatuor*, estne definitio?

B. Non.

A. At axioma?

B. Ita.

A. Est ergo lumine naturali cognitum; non a magistro arithmeticæ repertum, sed cum ipsa verborum intellectione a pueris receptum. Non ergo habet ab arithmetico geometra, *lineam bipedalem lineæ bipedali additam facere lineam quadrupedalem.*

B. Non sit ergo axioma, sed ab arithmetico demonstrandum.

A. Quis autem illud arithmeticus aut demonstravit, aut demonstrare se debuisse judicavit? Satis enim a nutricibus, dum nomina numerorum pueros docent, demonstratur. Quid, quod infinitæ sunt quantitates continuæ, quarum unius ad aliam ratio

DIALOGUS III.

numeris explicari non potest? Quomodo ergo contemplationis sunt arithmeticæ, quæ versatur tantum in rationibus numerorum? Contra vero, inter numeros ratio nulla est, quæ non exponi possit lineis. Quid, quod radices numerorum, quæ algebram fere totam sustentant, pleræque, ut ante monuimus, numeri non sunt? Quare et calculus earum non arithmeticus sed geometricus est. Quid denique, quod cum ad æquationem ventum est, problema plerumque demonstrari non potest sine aliqua effectione geometrica? Hæc cum ita sint, quid censes, geometriam arithmeticæ, an hanc illi subordinatam esse?

B. Ego vero nunquam dubitavi quin arithmetica geometriæ pars, nec ea magna, esset. Nam ex Euclidis libris pure geometricis, educi facile potest arithmetica; cum libri arithmetici, ne omnes quidem simul qui unquam scripti sunt, aut quos scripturus est Wallisius, sufficiant ad producendam centesimam partem theorematum geometricorum, quæ nunc habemus.

A. Adde et hoc, quod sicut regula alligationis, et regula falsi, ita regulam algebræ unam esse ex regulis arithmeticæ.

B. Sed multo illis ampliorem.

A. Assentior. Sequitur usus symbolorum, nempe, *necessitas, brevitas, perspicuitas.*—*Primo,* inquit, *necessitatis causa; cum pro numero adhuc ignoto substituitur symbolum, seu character, eousque dum ipse innotescit.*—Quasi problema, quod substituto symbolo seu charactere investigatur, investigari non posset sine symbolo.

B. An potest?

A. Quid? An vox hæc *ignotum* vel *quæsitum*

minus denotat numerum quem quærimus, quam litera A, vel R, vel character *p*? Aut minus recte dicemus *quæsiti quadratum*, quam A A, vel A q, vel A^2? DIALOGUS III.

B. Sed brevior est scriptio per literam unam, quam per integrum vocabulum.

A. Hoc quidem concedo tibi de brevitate scriptionis, non autem de brevitate cogitatorum; quia non characteres soli, nec sola verba, sed res ipsæ cogitandæ sunt, quæ abbreviari non possunt.

B. Nescio quid respondeam.

A. Deinde, si necessitas illa absoluta non sit, sed ex supposita brevitate, quid dices de secundo usu symbolorum, nempe, de brevitate, quare primus usus non sit supervacaneus?

B. Nescio hoc quoque.

A. Deinde quod addit:—*brevitatis et facilitatis causa, cum illud non raro citius peragatur per symbola seu species, quam per ipsos numeros:*—nisi intelligatur de scriptione, falsum est. Nam et res, et verba, et symbola cogitanda erunt; quorum ultimum erit inutile. Jam vero quod ad perspicuitatem attinet, ego sane in legendis demonstrationibus per symbola scriptis, quam per verba, majorem semper reperi difficultatem. Tu, qui conica ejus symbolice scripta legisti, magis ea perspicua esse existimas, quam conica Apollonii vel Midorgii?

B. Ego in legendis conicis Wallisii, cum inciderem in propositionem aliquam longiusculam, partim laboris impatientia, partim quod eam jam ante aliunde veram esse scirem, nec de methodo ejus dubitarem, demonstrationis viam nimium leviter examinavi.

A. In demonstrationibus per symbola, opera-

DIALOGUS III.

tionum supersunt, inquit, *vestigia.*—Nonne videntur tibi operationum vestigia expressiora esse, verba et ciphras scriptas, sine quibus operatio fieri non potest, quam symbola, quibus carere potest, et semper caruit operatio arithmetica? Nisi forte putes $A+B$ dicendam esse additionem, aut AB vel $A \times B$ multiplicationem, et $\frac{A}{B}$ divisionem esse A per B. Sed *Res*, inquit, *tota exemplo melius patebit.* Itaque problema adducit, quod et per algebram et sine algebra solvi potest; et utroque modo recte solvit; ita tamen ut solutionibus illis nihil possit esse magis appositum ad ostendendum quod algebra non est analytica. Problema autem sic se habet carmine redditum:

> Accessit virgo tres supplex ordine Divos,
> Et tulit accedens asses, quot nescio, secum.
> Oratus ductos geminavit Jupiter asses;
> Protinus illa Jovi tres asses grata pependit.
> Quotque superfuerant duplavit Phœbus Apollo;
> Grata itidem Phœbo tres virgo reddidit asses.
> Pallas tunc reliquos geminavit virginis asses;
> Assibus et tandem tribus est donata Minerva.
> Unicus et superest, quem secum rettulit, assis.
> Dic mihi quot fuerant quos primo virgo ferebat?

Solvit autem per algebram sic:

Pro ignoto numero assium allatorum ponit	$1\surd$
Qui duplatus a Jove fit . . .	$2\surd$
Inde Jovi solutis 3 assibus, restant	$2\surd$— 3 asses.
Qui duplati ab Apolline, fiunt .	$4\surd$— 6 asses.
Inde Apollini solutis 3 assibus, restant	$4\surd$— 9 asses.
Qui duplati a Pallade, fiunt .	$8\surd$—18 asses.

Inde Palladi solutis 3 assibus,
restant . . . . 8 √—21 asses.
Sed restabat unus tantum assis.
Est ergo 1 assis = 8√—21 asses.
Et additis utrobique 21 assibus, erunt 22 asses = 8√.
Et $2\frac{3}{4}$ asses = 1 √, id est, numero assium allatorum.

B. Recte sane, et breviter.

A. Fateor: sed in hac operatione quid vides, propter quod dicenda sit *analytica?* Sive, quod idem est, quodnam est hic compositum quod resolvitur? Dicesne duplationem illam esse resolutionem?

B. Minime.

A. Quid ergo? An ternorum illorum assium subductio resolutio est?

B. Non videtur.

A. Neque est; nam methodus tota est *synthetica.*

B. Quid autem est resolvere.

A. Resolvere, est id, quod compositum est, detexere, ordine qui sit ordini compositionis contrarius.

B. Declara hoc aliquo exemplo.

A. Accipe exemplum Wallisii problema solventis, ut dicit, sine algebra, hoc modo:

Relictus est assis 1. Itaque si Pallas reddat virgini quas acceperat 3, fiunt quatuor. Si illa reddat Palladi quod ab ea acceperat dimidium, fiunt 2. Deinde si Apollo reddat quos acceperat 3, fiunt 5; et illa Apollini quod acceperat dimidium, fiunt $2\frac{1}{2}$; et Jupiter quos acceperat 3 asses, fiunt $5\frac{1}{2}$. Et illa quod a Jove acceperat dimidium fiunt $2\frac{3}{4}$. Itaque omnia redeunt ad statum primum.

B. Recte, breviter, et analytice. Nam quod factum in problemate describitur ab initio ad finem,

DIALOGUS III.

id per mutuam redditionem fit infectum a fine ad initium.

A. Versus ipsius Wallisii sunt; neque enim hoc tacere potuit; etsi absque eo satis id manifestum erat; nam *ductos* geminavit Jupiter asses, nemo dixisset alius.

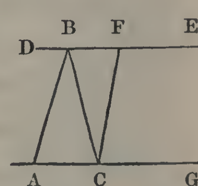
B. Problema ergo vetus est.

A. Fortasse; at certe ingeniosum est, factumque, ut arbitror, data opera ad notandos ethnicorum sacerdotes, quod qui ad deos accedebant illis mediantibus, fiebant, etiam exauditi (ut virgo hæc), pauperiores.

B. Propone jam exemplum analyticæ veræ, qua problema datum resolvitur in sua principia, nempe definitiones et axiomata.

A. Sit propositum, exempli causa, super lineam rectam ad unum et idem ejus punctum constituere tres angulos tribus angulis trianguli dati, unumquemlibet unicuilibet æqualem.

B. Datum sit triangulum ABC.



A. Per verticem B duco rectam DE, quam suppono angulum facere DBA angulo BAC æqualem, et angulum EBC æqualem angulo BCA. Cum ergo angulus ABC sit communis, erunt tres anguli ad A, B, C, æquales tribus angulis ad B, unus uni. Sumatur in BE (si opus est, producta) BF æqualis AC; et jungatur CF. Quoniam ergo duo latera BF, BC trianguli BCF, æqualia sunt lateribus AC, BC trianguli ABC, utrumque utrique, et angulus FBC æqualis, per hypothesin, angulo BCA, superposita BF ipsi CA cum ipsa congruet, et BC cum ipsa CB, et angulus FBC cum angulo BCA; et proinde etiam CF latus cum latere AB. Sunt ergo

æquales inter se AB, CF, (per axioma octavum Elementi primi Euclidis) et angulus BFC æqualis angulo BAC, (per Eucl. i. 4.) Qui autem ad punctum B in recta linea DF constituuntur anguli, omnes simul æquales sunt omnibus simul angulis constitutis ad punctum C in recta AC producta ad G. Nam partes simul omnes æquales sunt toti utrobique. Cum ergo angulus BCF æqualis sit angulo ABC, et FBC æqualis BCA, erit reliquus FCG æqualis reliquo DBA sive BAC. Sunt igitur rectæ AB, CF, quæ ostensæ sunt æquales, inclinatæ ad easdem partes secundum angulos æquales. Parallelæ autem sive æquidistantes lineæ definiuntur esse illæ, quæ ab æqualibus rectis æqualiter ad easdem partes inclinatis distinentur. Parallelæ ergo sunt BF, AC. Atque hactenus ratiocinationem, qua tres anguli trianguli rectilinei duobus rectis æquales esse demonstrantur, in partes ex quibus erat composita resolvimus; quæ *analysis* est.

DIALOGUS III.

B. Quomodo autem ex illis erat composita?

A. Sic. Ex eo quod AC, DF sunt parallelæ, concludunt angulum DBA æqualem esse angulo alterno BAC, et angulum FBC alterno BCA, et angulum ABC communem; et proinde tres DBA, ABC, FBC æquales esse tribus BAC, ABC, ACB, unumquemlibet uni. Scienduma utem est, quod si *analysis* plenissime perageretur, non minus prolixa esset quam ipsa esset demonstratio, sumpta ab ipsis principiis usque ad illatam conclusionem.

B. Quin natura analyseos talis sit qualis hic explicatur, dubitari non potest. Attamen ne imaginari quidem possum quo facto idem fieri possit per algebram.

A. Neque hercle ergo. Nam extra compara-

DIALOGUS III.

tionem rectangulorum, (et triangulorum, quæ sunt ipsorum dimidia), in geometria; et extra potestates numerorum in arithmetica; algebræ locus nullus est, neque in illis analysis magis est quam synthesis.

B. Exemplum ostende algebræ per potestates; ita dividens 8, ut quadratum unius partis sit ad rectangulum sub tota et reliqua parte, ut 2 ad 1.

A. Radix quadrata quæsiti sit A. Reliquus ergo numerus est 8-A: quadratum ipsum, AA: rectangulum quæsitum, $8 \times (8-A)$. Vis ergo AA : $8 \times (8-A)$: : 2 : 1 esse proportionales.

B. Volo.

A. Sunt ergo $AA = 16 \times (8-A)$; et additis utrinque 16 A, erunt $AA + 16A = 16 \times 8 = 128$. Quare $16 + A$, $\surd 128$, A, sunt continue proportionales. Datur ergo A; et proinde etiam AA, et rectangulum $8 \times (8-A)$.

B. Sed datum esse A, nondum satis perspicio.

A. Datur media proportionalis inter extrema $16+A$ et A, nempe, $\surd 128$. Quare descripto circulo, cujus diameter est 16, a quovis puncto ejus ducatur tangens æqualis $\surd 128$; ab extremitate ejus ducatur per centrum recta ad adversam circumferentiam, eritque pars ejus intercepta inter tangentem et circumferentiam æqualis quæsitæ A; ut manifestum est per Eucl. Elem. iii. prop. 36.

B. Ac Vieta in hujusmodi rationibus exponendis alia utitur operatione. Nam ex medio puncto differentiæ cognitæ describit circulum, cujus radius potest radicem numeri 128, et semissem differentiæ.

A. Eodem recidit utraque operatio.

B. Objicio etiam nondum inventam esse illam radicem. Numeri enim 128 radix quadrata nulla est.

A. Imo radicem habet, sed nullo æqualem numero. Nam numeri 16 et 8, qui faciunt 128, in linea recta similiter divisa in partes aliquotas distingui possunt; et inter illas rectas inveniri potest media proportionalis, cujus quadratum erit ipse numerus 128.

B. Etiam hinc intelligi potest problemata quanquam arithmetica, quæ sine ope geometriæ inveniri possunt per algebram, nulla esse.

A. Ne crede igitur nimium post hæc vaniloquio professorum. Sed quid quæso in ratiocinatione hac observas, propter quod dicenda sit *analysis?* An cum ventum esset ad analogismum hunc, $16 + A : \sqrt{128} :: \sqrt{128} : A$, aberamus longius a principiis, quam cum accessissemus ad prop. 36, Elem. iii. Euclidis.

B. Agnosco hic quidem cursum quendam et recursum inter æqualitatem rectangulorum et æqualitatem rationum; sed utra harum viarum magis tendat ad principia, statuere nondum possum. Sed progrediamur ad Caput duodecimum.

A. Capita reliqua minus molesta erunt. Nam quæ in illis recta sunt, ut sunt plurima, trita sunt et edita in omnibus fere libris arithmeticis, præter algebraica, quæ ex Oughtredi *Clave Mathematica*, ubi multo brevius et apertius traduntur, desumpta sunt. Ea vero quæ Wallisii propria sunt, falsa sunt. Id quod habet sub initium hujus capitis, nempe hæc verba, *sunt autem fractiones seu numeri fracti non tam numeri quam unitatis fragmenta*, suum est, idemque falsum et absurdum. Nam eo ipso quod *fragmenta* sunt, *fragmentorum numerus* sunt. Neque enim ratio ulla adduci potest quare unciæ, sextantes, trientes, besses,

dodrantes, cæteraque fragmenta assis, minus proprie numeri appellantur unciarum, sextantium, &c., quam animalia, numerus animalium. Capite decimo tertio traditur fractionum scribendarum ratio eadem quam vulgo sciunt, præter notationem fractionum algebraicarum, quas nemo intelligit nisi aliunde doctus. Quis enim intelligit quod $2\ Qu + 3\ R$ idem valeat quod $\frac{1\,R + \frac{3}{2}}{2\,R}$, nisi qui ante id didicisset.

B. Sed quæ regula est divisionis per symbola, accurata?

A. Differatur hoc ad examinationem Capitis vicesimi, id est, ad locum proprium. Examinetur jam Caput decimum tertium; ubi primo loco modum docet demonstrandi additionem *numerorum*, ut vocantur, *digitorum*. *Verbi*, inquit *gratia; $2+3=5$, sic demonstratur. Ponantur primum duo puncta, et deinde tria, quæ omnia, si numerentur, reperientur quinque.* Libet hic quærere, cum dicat quod *reperientur quinque*, a quo reperientur. Utrum ab eo qui scit, vel ab eo qui nescit, duo et tria esse quinque? Si ab eo qui scit, id ei demonstratum erat tunc cum nesciret. Sed qui potuit id fieri numerando ab eo qui sciret tantum quid essent duo et tria, nesciens quid essent quinque? Vides ergo ut nugatur.

B. Sed perge.

A. Vel sic. Quoniam notum est ex ipsa numerorum procreatione, quam Capite quinto tradidimus, quod sit $1+1=2$ et $2+1=3$ et $4+1=5$, &c. erunt etiam $2+3=1+1+3$; et $3+1=4$; et $4+1=5$.

Quomodo autem notum est per Cap. v. quod sit $4+1=5$? Num id illic demonstratur? Vel si demonstretur, ex quibus principiis?

B. Caput illud quintum definitionum est, vel, ut ipse dicit, quæ ibi traduntur sunt instar definitionum.

A. Principium ergo est, $4+1=5$. Cur non et $2+3=5$, æque principium est, et proinde indemonstrabile quod erat demonstrandum? Non intellexit Wallisius, saltem oblitus est $1+1$ binarii, $2+1$ vel $1+1+1$ ternarii, et sic deinceps, esse definitiones, neque accedere ad magistros arithmeticæ, nisi qui jam sciunt quot sunt in quolibet *numero digito* unitates.

B. At in numeris, quos articulos et compositos vocant, methodus addendi quænam sit satis demonstravit. Num et hoc negas?

A. Non nego. Sed ita demonstravit quemadmodum omnes; nam qui id quod ipsi faciunt inter operandum, clare eloquuntur: ut qui dicit; 8 et 7 sunt 15; subscribo unitatum loco 5; reservo 1 ad locum decadum; deinde, quod reservabatur cum 9 et 6 et 8 sunt 24 decades, id est, duæ centuriæ et 4 decades; subscribo decadum loco 4 et centuriarum loco 2, ut numerus totus fiat 245: non modo tres numeros 80, 68, 97, simul addidit, sed etiam recte additos esse demonstravit. Quid habet ille amplius in demonstratione tripaginali præter abundantiam verborum et obscuritatem symbolorum?

B. Nihil. Sed non animadverterat voces illas puerorum, dum numeros ita addunt, additionis esse demonstrationem.

A. Similiter demonstrationes substractionis, multiplicationis, et divisionis, sunt ipsæ voces operantium, subtrahentium, inquam, multiplicantium, et dividentium. Capite decimo quarto de subductione tractat, quam eodem modo demonstrat quo demonstravit additionem.

B. Transeamus ergo ad decimum quintum, *de additione et subductione speciosa.*

A. Quod habetur hoc capite, totum desumptum est ex Capite ii. et iii. Oughtredi *Clavis Mathematicæ,* cujus sunt brevissimæ, veruntamen plenissimæ, regulæ; altera additionis, nempe ut *conjungantur magnitudines servatis signis;* altera de subductione, nempe ut *conjuncta utraque magnitudine mutentur omnia signa magnitudinis subducendæ.* Additionis exemplum apud Oughtredum est,

ad 5 A
adde — 3 A

fiunt 5 A—3 A, sive 2 A.

Ubi Wallisius videns differentiam magnitudinum, nempe 2 A, poni ab Oughtredo pro 5 A—3 A, duas facit regulas ex una; alteram, ubi signa similia sunt, alteram ubi dissimilia, regulam magistri sui elegantissimam non necessario corrumpens; idemque facit circa regulam subductionis.

B. Videtur mihi in hoc capite docere debuisse Wallisius, quo pacto numeri dati radix alterius numeri dati radici commodissime addenda vel subducenda sit.

A. Additio radicum commodissima non fit sine multiplicatione; multiplicatio autem infra traditur Capite decimo octavo.

B. Istuc ergo eamus.

A. Duo igitur capita integra prætermittemus?

B. Sed percurramus leviter.

A. Titulus Capitis decimi sexti est *De additionis et subductionis probatione.* Per *probationem* intelligit *demonstrationem.*

B. Minime: nam neque additi subductionem, additionis; neque residui additionem, subductionis;

neque probationem noventariam, demonstrationem esse ipse dicit.

A. Quomodo autem *probatio* est, si *demonstratio* non est? Immerito ergo reprehendit Ramum, quod examinationes illas negaverit esse probationes, affirmaveritque veritatem operationis satis ex ipsa apparere operatione; id quod ego paulo ante dixi, nempe, operationem ipsam suæ veritatis esse demonstrationem.

Caput xvii. additionis et subductionis exercitium est; ubi computat primos annos a mundo condito ad annum præsentem, nempe, ab initio ad diluvium; a diluvio ad Arphaxad; ab illo ad Tharam; a Thara ad Abrahamum et promissionem.

B. Siste paulum. Cujus rei promissionem? Salutisne gentium in semine Abrahami, an promissionem terræ Canaan?

A. Non distinguit, habens fortasse utramque pro eadem. Deinde, a promissione ad Exodum; ad Templum; ad Christum; ad æram vulgarem; ad annum Christi 1655. Deinde, de annis moræ et servitutis Israelitarum in Ægypto disputat, et eorum computat mirabile incrementum.

B. Scio. Nempe ut obiter chronologiam sacram emendaret.

A. Nec tamen emendationes suas satis probat; nec si probasset, pars ulla hujus capitis ad arithmeticam pertineret. Vides ergo hominis ostentationem miseram, quicquid aut in scientiis, aut in linguis, aut in historia scire se sibi videbatur, in publicum importune proferentis, certa juxta et incerta, etiam in libro mathematico.

Accedo jam ad Caput xviii. *De multiplicatione.* Audi ergo, primo, quomodo definit *multiplicationem.*

DIALOGUS III.

Multiplicare, inquit, *est numerum invenire qui datam habeat rationem ad numerum datum.* Utrum propositio hæc (nam definitio non est) vera an falsa sit, unico exemplo intelligi potest. Sit datus numerus quilibet 6, et data ratio 4 ad 5. Potesne tu aut ille numerum quæsitum invenire per solam multiplicationem? Datus 6 multiplicandus est, sed per quem numerum? Quis, inquam, est multiplicans? An multiplicantem invenias per multiplicationem? Productus erit $7\frac{1}{2}$. Nam 4, 5, 6, $7\frac{1}{2}$, sunt proportionales. Numerum ergo quæsitum non invenies nisi dividendo $7\frac{1}{2}$ per 6. Emerget autem quotus $1\frac{3}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$. Quanam autem multiplicatione reperies istum $\frac{5}{4}$?

B. Intelligit ille datum oportere esse multiplicantem, eumque unitatis multiplum.

A. Alii quidem ita intelligunt. Interea vero definitio quam ipse affert, vitiosa est; quam tamen ad alias etiam quantitates applicat, paulo inferius dicens, *multiplicare* esse *datæ alicui quantitati aliam in data ratione exhibere.*

B. Erravit.

A. Tanto decuit illum minus definitionem reprehendere allatam ab Euclide, nempe, quod *numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot sunt in ipso unitates, toties componitur is qui multiplicatur, et factus est aliquis.*

B. Quid est quod hic reprehendit?

A. Quod vox hæc, *is qui multiplicatur*, posita sit in definitione *multiplicationis.*

B. Nonne merito?

A. Ita. Sed cum tantillo opere emendari potuit, rectius fecisset, arbitror, si emendata potius usus esset, quam si falsam in locum ejus substituisset.

B. Sed quomodo corrigenda est?

A. Sic. *Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot sunt in illo unitates, toties componitur hic, et aliquis fit.*

B. Recte; et tam parva mutatione emendata est, ut sine ullo geometriæ damno, etsi peccatum sit contra logicam, potuisset retineri.

A. Etiam retinebitur. Reliqua capitis hujus eadem sunt quæ vulgo traduntur, sed verbosius, adeoque obscurius ab Wallisio. Quod autem ad operationis demonstrationem attinere videatur, nihil affert; neque vero opus erat ut afferret, cum, ut jam sæpius dixi, ipsa operatio perfecta sit perfecti operis demonstratio.

B. Sequitur Caput xix., *De Divisione.*

A. Nihil hic video novi præter tritarum jam omnium manibus regularum declarationem longam et frigidam, et, siquidem id tibi aliquid videbitur, operationis formam aliquoties variatam.

B. Operationis alicujus formam variare non equidem difficile esse arbitror iis, qui formam ejus unam aliquam jam intelligunt, si tamen alio et alio loco scribere residuam, vel alio atque alio modo divisorem multiplicare et subducere, formam operationis novam constituere dicendum sit. Additionem et subductionem radicum quadraticarum prætermissam ab Wallisio in hunc locum rejecisti. Ostende ergo nunc, qua methodo operationes illæ perficiantur commodissime, id est, ubi fieri potest, accuratissime; ubi fieri non potest, cum minimo errore.

A. Sed ostendendum primo est quomodo radix quadratica multiplicanda sit per numerum. Radicem autem per numerum multiplicandi regula hæc est. Quadretur tum numerus tum radix; et quad-

rata inter se multiplicentur; eritque facti radix factum quæsitum. Exemplum: sit radix quadratica 4 multiplicanda per 6: quadratum radicis quadraticæ 4, est 4: quadratum a 6 est 36: 4 in 36 producit 144: radix 144, nempe 12, est id quod fit ex ductu 6 in radicem quadraticam 4, id est, in 2. Quod sic demonstro. Sint duo quadrata, AA=36, BB=4: erunt ergo AA, AB, BB, continue proportionales, nimirum, in ratione A ad B. Est autem AB id quod fit ex radice A, sive 6, in radicem B, sive 2.

B. Recte hoc. Sed cur non melius est dati quadrati radicem primo invenire, et deinde inventum multiplicare per datum numerum.

A. Quia, nisi numeri dati sint quadrati, inventa radix accurata non erit; sed error aliquis certe inerit, qui post major fiet per multiplicationem, quæ multiplicatio per hanc regulam evitatur.

B. Video, hoc exemplo, quod datis duobus quadratis circa diametrum, completi super totam diametrum quadrati utrumvis complementorum, medium est proportionale inter quadrata data.

A. Ita est.

B. Adde jam radici quadraticæ radicem quadraticam.

A. Regula hæc est. Quadrati inter se multiplicentur; producti radix inveniatur, dupliceturque; duplicatæ addantur numeri quadrati dati; radix summæ est summa radicum propositarum. Exempli gratia: radix quadratica numeri 9 sit addenda radici quadraticæ numeri 25. Quadrati inter se multiplicati faciunt 225; cujus numeri radix quadratica est 15, qui duplicatus est 30; cui numero si summa quadratorum addatur, nempe 34, fiunt

64; cujus radix 8 æqualis est radici numeri 9 una cum radici numeri 25. Demonstratur autem sic. Multiplicatæ inter se radices faciunt unum ex complementis; et duplicatus facit duo complementa ad duos quadratos, 9 et 25, super eandem diagonalem dispositos; additis ergo ipsis quadratis, fit quadratum a recta æquali lateribus ambobus. Illius ergo radix æqualis est summæ radicum propositarum.

B. Recte. Multiplica jam numerum radicum in numerum radicum.

A. Regula est hæc. Ducatur quadratorum unus in alterum; radix producti multiplicetur per factum ex numeris. Exempli causa: sint 8 radices quadraticæ numeri 9 multiplicandæ in 3 radices quadraticas numeri 4. Quadrati 4 et 9 inter se faciunt 36: factus ex numeris 3 et 8 est 24; qui multiplicatus in radicem quadraticam 36, = 6, facit 144. Tantundem faciunt 8 radices quadraticæ 9, id est, 24 in 3 radices quadraticas 4, id est, in 6. Demonstratur autem sic. Radix 9 in radicem 4, est radix ejus qui fit ex 9 in 4, per regulam primam supra traditam. Quare 8 radices quadraticæ 9, in 3 radices quadraticas 4, est id quod fit ex 24 radicibus quadraticis ejus numeri qui fit ex 9 in 4; id est, quod fit ex 24 in 6, id est, numeri 144.

B. In numeris quidem quadratis operabimur per hanc regulam accuratissime; etiam in numeris non quadratis minor multo erit error, quam si radices extractas non veras post multiplicaremus: nam multiplicaremus una errorem. Sed eademne est methodus multiplicandi radices cubicas, quæ fuit multiplicandi radices quadraticas?

A. Eadem. Nam illici ostensum est productum

DIALOGUS III.

ex radicibus inter se, radicem esse producti ex quadratis inter se. Idem autem hic ostendam de radicibus cubicis, quadrato-quadraticis, et cæteris potestatibus. Sit enim datus cubus AAA; cujus proinde radix est A. Sitque datus numerus B, et per consequens datus est cubus ejus BBB. Dico factum ex A in B, esse radicem cubicam numeri facti ex AAA multiplicati per BBB. Factum enim a cubis est ABABAB, cujus radix cubica est AB.

B. Ostende operationem in numeris, multiplicans radicem cubicam numeri 64 in numerum 5.

A. Hoc est, in radicem cubicam numeri 125. Multiplico 64 in 125, et factus est 8000; cujus radix cubica est 20, factus ex 5 multiplicatis in radicem cubicam numeri 64, id est, ex 5 in 4. Similiter, si duo numeri multiplicentur inter se, facti radix quadrato-quadratica æqualis erit facto ex ipsorum radicibus quadrato-quadraticis. Exempli causa: sint multiplicati inter se 16 et 81; factus erit 1296, cujus radix quadrato-quadratica est 6, factus ex 2 radice quadrato-quadratica numeri 16, et ex 3 radice quadrato-quadratica numeri 81.

B. Manifesta hæc sunt. Sed si plures radices quadraticæ, puta 6 radices numeri 4, ducendæ sint in plures radices, puta in 4 radices numeri 9, quid faciendum est?

A. Divide nunc numerum radicum quadraticarum per numerum alium radicum quadraticarum. Verbi gratia, divide 6 radices quadraticas numeri 36, per 2 radices quadraticas numeri 9.

Quadratum dividendi dividatur per quadratum alterum, et numerus per numerum. Quotientis radix est quotiens quæsitus.

Exempli causa: sit quadratum 36, cujus 4 radices dividendæ sunt per 2 radices quadrati numeri 4. DIALOGUS III.

Divido ergo 36 per 9; quotiens est 4.

Divido item 4 per 2; quotiens est 2.

Interpono inter quotientes notam radicis. Itaque quotiens quæsitus est 2 $\surd$4. Et 4 $\surd$ 36, id est 24, si dividatur per 2 $\surd$9, id est 6, erit 2 $\surd$4, id est 4. Nam $\frac{4\surd AA}{2\surd BB}=2\surd\frac{AA}{BB}$

B. Quomodo autem radix quadratica numeri non quadrati, a radice quadratica numeri etiam non quadrati subtrahitur?

A. Si radices illæ sint commensurabiles, per hanc regulam. Dividatur uterque numerus per maximam amborum mensuram communem. Radix autem majoris dividatur in rationem radicis quotientis ad radicem quotientis. Exempli causa: sit radix quadratica 20 subducenda ex radice quadratica 45; divisis 45 et 20 per communem eorum mensuram maximam 5, quotientes sunt 9 et 4, et eorum radices 3 et 2. Divide ergo radicem quadraticam 45 in rationem 3 ad 2; eritque segmentum minus radice quadratica 20; ex quo cognoscitur residuum ad radicem quadraticam 45.

B. Sed radix quadratica 45 cum numerus non sit, dividi in rationem 3 ad 2 accurate non potest. Velim ergo scire cujus numeri radix sit illud residuum.

A. Aliam igitur methodum radices commensurabiles tum subducendi tum addendi, nec quadraticas modo sed etiam cubicas, habebis ex *Clave Mathematica* Oughtredi; additionis quidem hanc. Dividatur uterque numerus per maximam amborum mensuram communem; radices utriusque quotientis simul addantur; totius quadratum per

DIALOGUS III.

eandem communem mensuram multiplicetur; producti radix est radicum numerorum propositorum summa. Exemplum operationis affert hoc. Sit radix quadratica 147 addenda radici quadraticæ 12. Divisis ambobus numeris per maximam communem mensuram 3, fiunt quotientes 49 et 4; quorum radices sunt 7 et 2. Quadratus a (7+2) est 81, qui ductus in eandem communem mensuram 3, facit 243, cujus radix quadratica æqualis est radicibus quadraticis utriusque numeri 147 et 12. Substractionis autem exemplum hoc est. Quadretur, non ut ante, summa, sed differentia radicum 7 et 2, quæ est 5; cujus quadratus est 25; qui multiplicatus per eandem maximam communem mensuram 3, facit 75; cujus radix est æqualis numero qui relinquitur deducta radice quadratica 12 ex radice quadratica 147.

B. Num demonstrat hoc Oughtredus?

A. Minime. Propositum enim illi puto erat algebram non omnibus scribere, sed geometris, qui quomodo demonstrandum esset ex ipsa operatione intelligere possunt.

B. Demonstra hoc tu.

A. Quod datum est sumo, radices numerorum 147 et 12 esse commensurabiles. Sunt ergo eædem radices numerorum quadratorum. Ut ergo 147 ad 12, ita est quadratus numerus ad quadratum numerum. Dividantur ambo per eorum communem mensuram maximam 3, eruntque quotientes 49 et 4. Est ergo, ut 147 ad 12, ita quadratus numerus 49 ad quadratum numerum 4; et ut radix quadratica 147 ad radicem quadraticam 12, ita 7 ad 2. Additis simul 7 et 2, fit 9; cujus quadratus est 81: qui numerus multiplicatus per communem

mensuram maximam 3, facit 243. Ut ergo 147 ad 49, ita est 243 ad 81 : et ut 12 ad 4, ita est rursus 243 ad 81. Quare ut 147+12 ad 49+4, ita est 243 ad 81. Et proinde ut radix quadratica 147+ radice quadratica 12 ad radicem quadraticam 49+ radice quadratica 4, id est ad 7+2, ita est radix quadratica 243 ad radicem quadraticam 81, id est 7+2. Quare radix quadratica 243 æqualis est radici quadraticæ 147+radice quadratica 12. Quod erat demonstrandum.

Similis est demonstratio subductionis. Est enim ut radix quadratica 147 ad radicem quadraticam 12, ita 7 ad 2. Quare si subducatur 2 ex 7, erit ut radix quadratica 147—radice quadratica 12 ad radicem quadraticam 12, ita 7—2, id est 5, ad 2. Est autem quadratus a 5=25 : qui multiplicatus per eandem maximam mensuram communem 3, facit 75. Est ergo ut radix quadratica 147—radice quadratica 12, ad 7—2, ita radix quadratica 75 ad 7—2, sive ad 5. Est ergo radix quadratica 147—radice quadratica 12, æqualis radici quadraticæ 75. Eadem est methodus etiam in subducendis addendisque radicibus cubicis, et radicibus cæterarum potestatum, nisi quod in additione et subductione radicum quadraticarum quadratorum, qui ex divisione numerorum per maximam eorum communem mensuram oriuntur, summa vel differentia ducitur in communem mensuram ; in cæteris vero potestatum radicibus, summa et differentia potestatum propriarum addendæ, et substrahendæ, et per numerorum propositorum maximam communem mensuram multiplicandæ sunt.

B. Sunt hæc quidem liquido et breviter demonstrata; sed fortasse etiam demonstrata sunt in capite

DIALOGUS III.

sequente, ubi multiplicare et dividere docet Wallisius algebrice.

A. Operationum harum neque in eo capite, neque in toto hoc opere, etsi ab illo appellatur *opus arithmeticum integrum,* ne mentio quidem ulla est. Nihil enim aliud istic docet, quam multiplicare et dividere symbola, ut cuilibet manifestum esse potest qui caput illud legerit ; et hæc quoque ex Oughtredo et Digghesio. Itaque caput illud, nempe, Caput xx., transiliamus. Etiam Caput xxi., in quo agit de multiplicationis et divisionis probationibus, possumus, cum nihil contineat neque boni neque mali, ut innocuum quidem sed inutile sine damno præterire. Caput xxii. continet multiplicationis et divisionis exercitium in mensurandis et comparandis rectangulis ; in quo nihil quidem reperio, quod ut falsum redarguendum sit ; omnia vere puerilia, et non necessaria, facilia tamen, eademque verbosissime ut pueris scripta sunt. Sequitur Caput xxiii., cui titulus, *Euclidis Elementum secundum arithmetice demonstratum,* id est, ut mox subjungit, *totum fere Elementum secundum.* Nam demonstrat theoremata prima tantum decem. Sed quomodo demonstrat ? Theorema primum per symbola scribit ; et pro omni argumento, *patet,* inquit, *ex calculo.*

B. An pleniorem exigis demonstrationem, quam est calculus ?

A. Minime. Sed cum eædem propositiones per calculum demonstratæ extent apud Clavium, quorsum attinuit aliorum laborem σφετερίζεσθαι ?

B. Fortasse ille brevius eas demonstravit.

A. Tantum abest ut demonstrationes Wallisii breviores sint illis Clavii, quanquam symbolice

scriptæ, ut plusquam triplo sint longiores. Et præterea, citius intelliget lector quilibet, etiam symbolicus, decem illas demonstrationes Clavii, quam quamlibet unam ex demonstrationibus Wallisii. Denique propositiones illæ a quolibet, qui earum intelligit demonstrationes geometricas, non minus ad numeros applicari possunt quama Clavio applicatæ sunt.

B. Pergamus ergo ad Caput xxiv., *De Geodæsia.* Sed primo, dic mihi quid differt *Geodæsia* a *Geometria?*

A. Nihil, nisi quod quibusdam hominibus mirum in modum placet vocum Græcarum efformatio aliqua vel compositio nova, ad ostentationem peritiæ linguæ Græcæ. Sed diu nunc est quod ea vox, significans terræ divisionem, pro parte artis agrimensorum usurpata est. Nosti quam exigua et trita pars ea sit geometriæ, qua utuntur agrimensores. Docetur autem hoc capite novi nihil, sed quomodo triangulorum, et proinde *polygonorum* rectilineorum, areæ ad numerorum calculum reduci solent.

B. Nonne etiam circuli et sectorum mensurationem, et quadraturam circuli hic docet?

A. Scribitur quidem in margine libri, *mensuratio circuli et portionum ejus;* et paulo inferius, *de circuli quadratura; et ratio perimetri circularis ad diametrum.* In textu autem negat se hæc docere, sed de illis fusius dictum esse dicit in sua *Arithmetica Infinitorum.* Dicit præterea, *Josephum Scaligerum, Severinum Longomontanum, et nuperrime Thomam Hobbes, immortales sibi inde singulis laudes deberi somniantes, mire hallucinatos esse.*

DIALOGUS III.

B. Socios adjungit Hobbio non ignobiles.

A. Sed quid habet ipse Wallisius *de quadratura circuli* in sua *Arithmetica Infinitorum.*

B. Tu, si voles, videbis; nam afferam tibi etiam illum librum, postquam hunc excusserimus, excutiendum.

A. Caput xxv. est *de quantitatum invicem comparatione quoad differentiam, et quoad rationem:* id est, ut vulgo loquimur, de rationibus arithmetica et geometrica. Dicit autem sciendum esse quantitates non nisi homogeneas comparandas esse; et hoc quidem recte. Deinde subjungit, *si quis autem contrarium fecerit, puta, datæ lineæ ad datam superficiem, vel temporis ad lineam, rationem inquirens, idem erit ac si quæsiverit quantum temporis æquetur lineæ.*

B. Videtur hic repetere illud quod Hobbio ante objecerat, quod quantitatem temporis cum quantitate lineæ comparaverit.

A. Prætereo loquutionem illam barbaram, *idem erit* etc. Sed a te quæro, utrum idem sit quærere quam rationem habet quantitas temporis ad quantitatem lineæ, et quærere quantum temporis æquatur lineæ.

B. Puto.

A. Quantitas temporis, quid est?

B. Nonne ipsum tempus determinatum?

A. Et quantitas lapidis, quid est?

B. Non est respondendum nunc ut prius, nempe, esse ipsum lapidem determinatum.

A. Refugis scilicet absurditatem dicti, *lapis est quantitas.* Attamen non minus absurde dicitur tempus esse quantitatem.

B. Quid ita? Cum in prædicamento quantitatis *tempus* sit, *lapis* non sit.

A. Quamdiu est, quod tempus sit in illo prædicamento, et a quo ibi collocatum ?

B. Positum ibi est ab Aristotele.

A. Si non posuisset, non ibi esset. Nihil ergo agis, nisi ostendas quare sic collocatum esse oportuit. *Tantum* quidem dicitur esse tam *corpus naturale* quam *tempus;* neutrum autem dici potest abstracte *quantitas.* Omnis enim quantitas, si accurate loquendum est, aut *longitudo* est, aut *superficies*, aut *solidum*, sive ut quidam loqui solent, corpus mathematicum. *Tempus* autem, et *motus*, et *vis*, cæteræque res de quibus quæri potest quantæ sunt, quantitates habent, quibus quantæ sunt determinatur, aliquas vel aliquam ex illis tribus, nimirum illas ipsas quibus mensurantur. Temporis jam mensura quænam est?

B. Motus.

A. Scio. Sed ipsius motus quænam est mensura ?

B. Linea. Nam per lineas metimur motus, saltem metiri possumus, et per motum tempus.

A. Recte. Et quod mensuram metitur, metitur etiam mensuratum. Est ergo linea mensura temporis : potest autem temporis mensura comparari cum linea, hoc est, linea cum linea.

B. Imo, necesse est ut comparetur, quia alioqui non esset mensura. Video jam, quanquam absurdum sit lineam dicere tempori æqualem esse, non tamen absurde dici quantitatem lineæ æqualem esse temporis quantitati. Assentior ergo tibi, quæri posse rationem quantitatis temporis ad quantitatem lineæ, etsi non ad ipsum tempus, ut neque ullius quantitatis ad corpus naturale. Pudet ergo mei, tum etiam Wallisii, cui in hac re et nonnullis aliis nimium temere crediderim. Sed non satis intelligo cur

DIALOGUS III.

potius *quantitatem lineæ* dicis, quam simpliciter *lineam.*

A. Quia accurate loquentes, lineam dicemus esse *longam,* potius quam *longitudinem.* Est enim linea id quo longitudines mensuramus, nempe, corpus aliquod, ut funis, virga, brachium, pes, vel aliquid simile; et quia dum eo utimur in rebus mensurandis, unam ejus dimensionem, nempe longitudinem, solam consideramus, ob eam rem obtinuit habere et dici longitudinem.

B. Fuimus sane ego et Wallisius tardiores quam ut hæc ita esse, nisi ab aliis moniti, intelligeremus; cæterum ego aliquanto magis cavi quam ille, ne deridere viderer ea quæ non satis intelligerem, et postea vera esse apparerent. Non ergo comprobo ea quæ subjungit, nimirum, quærere quam rationem habeat quantitas lineæ ad quantitatem temporis, *non minus absurdum esse, quam si quæratur quot colores constituunt sonum, et quot soni constituunt gravitatem.*

A. Sed ille se a scommatis abstinere ideo non potuit, quia ex eorum numero est, qui de iis quæ semel conceperint dubitare non possunt.

B. Quos dicis?

A. Eos dico qui in civitate degentes, civitatisque commodorum participes, et a civili potestate accipientes quod vivunt, summo tamen imperanti civitatis imperare, saltem non obedire, postulant.

B. Mitte ista. Perge legere.

A. Ita faciam. Vides interim quantitates temporis et lineæ esse homogeneas; homogeneæ enim quantitates sunt, ut in superioribus colloquiis agnovisti, quarum mensuræ ἐφαρμόζουσι. Accedens inde ad distinctionem rationis arithmeticæ a ratione

geometrica, illam esse dicit *qua comparantur magnitudines secundum differentiam;* et id quidem recte; hanc, *secundum quam una est alterius quotupla vel quantupla.*

B. Quid est illud quantuplum? Latinum certe non est.

A. ἀπορία λόγων βήξ proverbium Græcorum, quod Latine sonat *cui hæret oratio tussit,* verum est; sed et verum est eos, qui dicendo progredi alias nesciunt, necesse aliquando habere nova verba cudere quæ nihil significant non plus quam tussis. Nam cum deberet dicere rationem geometricam esse tunc, cum una quantitas tanta est respectu alterius, quemadmodum superius dictum est, et* ignorans naturam rei dixit esse tunc, cum una quantitas est quantupla alterius.

B. Imo vero, non ignorans, sed nolens videri edoctus ab Hobbio, (nam is illum hoc docuerat), voluit saltem aliter loqui, ut videretur dissentire. Infæliciter.

A. Paulo post, eadem exemplo illustrans, *secundo,* inquit, *quæsito satisfit ubi ostenditur quotuplum sit hoc ad illud,* (voluit dicere *hoc illius*), omissa voce *quantupla.* Ex quo intelligitur rationem *diametri* ad *latus* geometricam non esse, cum altera alterius totupla esse non possit. Itaque melius aliquanto fecisset, si retinuisset *quantuplum.*

B. Quomodo vertitur Anglice *quantuplum* vel *tantuplum?*

A. Viderint lectores Angli. Sed lego.—*In posteriori, de ratione sive proportione quæritur, differentia interim minime considerata.*—Quid? In

---

* Sic Edit. 1668.

DIALOGUS III.

comparatione geometrica 4 ad 2, vel 2 ad 1, nullane habita est ratio differentiæ?

B. Æque ac in ratione arithmetica. Nam differentia inter 4 et 2 est dimidium antecedentis, et differentia inter 2 et 1, est item dimidium differentiæ inter antecedens et consequens; quarum differentiarum si nulla haberetur consideratio, nulla consideraretur omnino ratio.

A. Divisionis, inquit, *quotiens ostendit rationem dividui ad divisorem.* Verum est. Sed in sequentibus, quoties proposito suo expedit, quotientem semper dicit esse dividui ad divisorem rationem ipsam; quippe qui absque eo regulam auream demonstrare non potuisset. *Si pondus,* inquit, A *sit ad pondus* B, *ut linea* α *ad lineam* β, *non tamen dici potest vicissim, ut pondus* A *ad lineam* α, *ita pondus* B *esse ad lineam* β.

B. Siquidem per *pondus* intelligat *ponderis quantitatem,* non video cur non possit ita dici. Nam quantitates ponderis et lineæ exhiberi possunt in duabus lineis.

A. Consentanea hæc sunt iis quæ ubique habet loquens de natura quantitatis; confundit enim *abstractum* cum *concreto, quantitatem* cum *quanto,* tanquam significarent idem. Sed vide quam imperite loquitur in sequentibus. Nosti geometras, quando datur area rectanguli cum uno coefficentium, latus alterum solere invenire per applicationem areæ ad latus datum; arithmeticos autem, dato numero et uno numerorum per quorum multiplicationem factus est, alterum invenire per divisionem. Itaque propter similitudinem methodi, divisio arithmeticorum et applicatio geometrarum pro eadem re haberi consuevit. Exempli causa:

si rectangulum dicatur esse 12, intelligitur continere 12 rectangula æqualia et toti similia; quod si dividatur per 6, intelligitur per 6, sex ex istis rectangulis. Ita ut si quæratur quoties 6 rectangula contineantur in 12 rectangulis ejusdem cum illis magnitudinis, respondebitur (secundum quotientem) 2. Itaque applicatio geometrarum et divisio arithmeticorum eadem fere res est, ut et ductio geometrarum et arithmeticorum multiplicatio; nisi quod multiplicatio lineæ per numerum, nunquam producit superficiem, sed lineas; nec applicatio numeri ad planum facit unquam lineam. Quod autem latus, id est linea, per applicationem prodeat, cum per divisionem prodeat numerus rectangulorum, id contingit, quia similitudo et æqualitas rectangulorum facit ut alterum quidem indicet numerum rectangulorum similium et æqualium, alterum vero numerum multiplicantem. Neque in rectangulis tantum, sed etiam in quibuslibet parallelogrammis idem accidit. Quod cum ille non videret, mire se torquet, cruda et indigesta cogitata sua explicare cupiens. Itaque divisionem esse negat, nisi καταχρηστικῶς, quotientemque non proprie dici id quod prodit, nec respondere questioni *quot* aut *quoties;* cum tamen manifestum sit, id, quod prodit, esse latus cujus segmenta sunt numerus segmentorum indicans quoties numerus minorum parallelogrammorum contineatur in parallelogrammo toto. Exempli gratia; in parallelogrammo ABCD, diviso AB in 6 partes æquales, et AC in 2 partes æquales AE, EC, latus AC, nempe quotiens, est 2, indicans sex parallelogramma contenta in AF contineri bis in toto parallelogrammo BC. Deinde paulo post, *ubi*

DIALOGUS III.

magnitudo, inquit, *aliqua numero dividitur, non tam divisio est quam multiplicatio.* Quod falsum est; imo vero absurdum, magnitudinem per numerum dividi, ut nulla tamen fiat divisio. Nam si quæratur quoties 2 A reperiantur in 1 A, respondetur accurate $\frac{1}{2}$ semel; æque ac si quærenti quoties 12 continentur in 6, responderetur $\frac{6}{12}$. At *quæritur*, inquit Wallisius, *quoties numerus quadratorum in area* A B, *contineat numerum longitudinum in latere* A, *ut proveniat numerus longitudinum in latere* B. Itaque in numero quadratorum, id est in parallelogrammo, continetur numerus longitudinum: id est, longitudines aliquot faciunt superficiem. Quod et absurdum est, et contra ea quæ proxime ante dixerat, nimirum, *hic non quæri quoties* A *continetur in plano* A B. Sin per numeros quadratorum et longitudinum intelligi vult numeros simpliciter, ut sensus sit, numerum aliquem simpliciter, id est, nullarum rerum numerum contineri in area parallelogrammi A B, loquitur aliquanto etiam absurdius.

B. Veritatem circa differentiam inter applicationem plani ad lineam, et divisionem numeri per numerum, pauci sunt qui non intelligunt, sed videntibus quasi per nubem, utrum accuratissime conveniant inter se nec ne, non satis constat.

A. Imo vero, potius id quod constat nescientes eloqui, coguntur a sua ipsorum ἀκυρολογίᾳ veritati, quam enuntiare nesciunt, contradicere. Quod proxime sequitur, *rationes omnes* (subaudi geometricas) *quarumcunque ad invicem quantitatum esse inter se homogeneas*, peracutum est, adeo ut non intelligatur. Ubi definivit *homogeneum?*

B. Nusquam. Sed definiisti tu homogeneas

quantitates eas esse quarum mensuræ congruere possunt.

A. Sed quænam mensura est qua computantur inter se duæ rationes? Per lineam minorem metimur majorem; et per superficiem minorem, majorem superficiem; nimirum, unam alteri superponendo. Sed an et rationem majorem superponendo metimur, vel ratio rationi superponi potest?

B. Minime. Sed possunt quantitates ipsæ, quarum ratio quæritur, una supra aliam poni; et rationes ipsæ sic comparari; ut fecit Hobbius, Cap. xiii. Art. 6, libri DE CORPORE, in quo capite theoremeta Elementi quinti Euclidis omnia, et nonnulla alia non minus pulchra, breviter et perspicue demonstravit.

A. Si ab illis quæ ibi dicta sunt suam hanc rationum homogeneitatem derivavit, recte fecit; id nescivit tamen. Præterea, quod dicit lineam et pondus heterogenea esse, verum est; potest tamen esse ut eorum quantitates sint homogeneæ; nam ut lineæ ad lineam ratio in duabus lineis exhibetur, sic etiam eorum* ponderum ratio in duabus lineis exhiberi potest. Ut enim cubus ad cubum ejusdem materiæ duplum, ita est pondus ad pondus duplum; et ut utrumvis ad suum duplum, ita linea ad lineam duplam. Erit ergo ut quantitas ponderis ad longitudinem lineæ quæ ipsum repræsentat, ita quantitas ponderis dupli ad longitudinem lineæ duplæ ipsum repræsentantis. Sed pergo.—*Si comparetur*, inquit, *quoad rationem quadripondium et bipondium, ratio est dupla; si linea quadrupedalis ad pedalem, ratio est quadrupla; quæ rationes ad invicem comparari possunt, nempe, hæc illius*

* Sic Edit. 1668. Quære "*duorum* ponderum."

dupla est.—Bene se habet. Sed quid si pro *quadripondio* et *bipondio* posuisset sex pondo et tripondium, et pro lineis quadrupedali et pedali lineam duodecim pedum et trium pedum ; quomodo argumentum ejus quadrasset ? Quomodo, inquam, rationem posteriorem prioris quanta pars esset, ostendisset ?

B. Sic. Si comparatur quoad rationem sex pondo et tripondium, ratio est dupla ; si linea duodecim pedum comparatur cum linea duorum pedum, oritur ratio sextupla. Quæ rationes comparari possunt ; nempe, hæc illius erit tripla.

A. Quid ita ? Rationem 12 ad 2 triplam esse censes rationis 6 ad 3 ?

B. Video : nam ratio 16 ad 2 est tripla rationis 6 ad 3. Sed fraudi illi et mihi fuit, quod in exemplo Wallisiano tum quantitates tum rationes, altera alterius dupla est ; id quod contingit in progressione per duplationem sola, alias non item. Sed miror cur hic dicit rationem 4 ad 1 duplam esse rationis 2 ad 1, cum ipse in *Elencho* multis et malis verbis contendat rationem illam dicendam esse non duplam, sed duplicatam.

A. Deinde causam reddens discriminis inter comparationem duarum quantitatum quoad differentiam, et comparationem earundem quoad rationem, imperitiam suam ostendit etiam amplius. Nam cum ostendere deberet differentias *quantitatum* excessuum vel residuorum esse homogeneas, ostendit tantum ipsa *quanta*, nempe excessus et residua, esse homogenea. Nescit enim distinguere inter *quantum* et *quantitatem*. Secundo, cum dicat *ubi autem comparatio fit quoad rationem, quæ emerget ratio comparatorum genus non raro deserit, et*

transit in genus numerosum, manifeste prodit harum rerum ignorantiam invincibilem. DIALOGUS III.

B. Invincibilem?

A. Talem, inquam, quæ a nullius hominis alterius ignorantia superari potest. *Comparatio*, inquit, *non raro relinquit comparatorum genus*. Concedit ergo quod relinquit comparatorum genus aliquando. Sunt ergo *comparatio* et *comparatum* aliquando homogenea. Præclare pro gradu doctorali et officio professoris geometriæ.

B. Vide quæso, omissis quæ ille erravit, an ego sensum tuum de hac re satis capiam. Videris enim tu sentire rationem rationi, geometricam geometricæ, et rationem rationi, arithmeticam arithmeticæ, homogeneam esse.

A. Ita.

B. Et rationem geometricam arithmeticæ heterogeneam.

A. Etiam.

B. Et in *quantis*, lineam lineæ, superficiem superficiei, et solidum solido homogenea; sed altera alteris heterogenea.

A. Nimirum, sic sentiunt omnes.

B. Sed quantitatem, in abstracto, cujuscunque rei quantitati, in abstracto, cujuslibet alterius rei, homogeneam esse, ideoque linearum, superficierum, solidorum, temporis, motus, vis, ponderis, roboris, resistentiæ quantitates esse homogeneas, etsi ipsæ res sint heterogeneæ. Item, loquendo de iisdem rebus pluraliter, quantitates plurium linearum, superficierum, solidorum, temporum, motuum, virium, ponderum, resistentiarum, esse homogeneas, tum inter se, tum etiam numero; numerum autem non

DIALOGUS III.

esse quantitatem, sed quantitates vel quanta, vel plura quæcunque. Nonne ita est?

A. Ita profecto arbitror.

B. Et ego; nam clare et accuratissime quod res est, eloquutus es.

A. Quid autem volunt ista postrema verba, *et transit in genus numerosum?*

B. Valent illa forte in homine mathematico, idem quod tussis in oratore.

A. Sed vide id quod sequitur; primo, an sit verum; secundo, an consentaneum illis quæ alias dicere solitus est. Verba hæc sunt: *Et quidem cum duplum et dimidium, triplum et triens, perinde pro rationum nominibus habenda sint, dimidii autem et trientis notæ* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ *numeris (fractis) accenseantur, quidni et dupli, tripli notæ,* $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$ *vel* 2, 3? *Atque hac potissimum de causa ego totam doctrinam rationum arithmeticæ potius quam geometricæ speculationis esse autumo.*

B. Neque vera sunt, neque dissentanea iis quæ sensit scripsitque pluribus in locis; nec tamen iis, quæ in nonnullis aliis locis scripsit monitus, consentanea. Plerumque enim, ut nunc, numerum fractum, sive quotientem, eandem rem esse dicit cum ratione. Sed cum monitus ab Hobbio esset, numeros fractos quotientesque omnes esse quantitates absolutas, rationem autem omnem quantitatem comparativam esse; negavit se dixisse, quotientem esse rationem ipsam, sed rationem esse *penes* quotientem. Tractatus ejus de *Arithmetica Infinitorum* totus eo fundamento nititur, quod quotiens sit ipsa divisoris ad dividendum ratio, ut quod $\frac{1}{3}$ sit ratio 1 ad 3.

A. Si ita est, neque totus iste tractatus ullius

est pretii, neque is qui illum scripsit. Scripserat Oughtredus Capite sexto *Clavis Mathematicæ*, sub initium, quod quotiens divisoris ad dividendum rationem *indicat*. Verum in editione Anglica invenio eo loco, quotientem *esse* rationem illam ipsam. Forte ergo liber ille Anglicus ex versione est ipsius Wallisii.

B. Nescio, sed parum refert; non enim creditur Oughtredum sic verti voluisse.

A. Pergens: *Comparationem, quæ est quoad differentiam, ad quantitatem; at quæ quoad rationem, ad qualitatem referendam esse*, ait. Nempe, illam ad prædicamentum *quantitatis*, hanc ad prædicamentum *qualitatis*. Sed quare? Quia ab Euclide definitur ποιὰ σχέσις. En hic κατηγοριμανίαν professorum academicorum. Quid autem significat ποιὰ σχέσις?

B. *Habitudinem qualitativam*, ut ille nunc vertit. Sed fateor me non intelligere neque quid sit *habitudo*, neque quid sit *qualitativa*. Dices fortasse tu hoc loco tussiisse etiam Euclidem.

A. Sequuntur deinceps duæ paginæ in quibus interpretatur quid sint *progressio geometrica* et *progressio arithmetica, continua et interrupta;* ubi non tam deest veritas, quam abundant verba. Caput vicesimum sextum, continet solutiones quarundam quæstionum facilium per progressionem arithmeticam, sine demonstrationibus, ut apud vulgus arithmeticorum practicorum. Caput vicesimum septimum eadem et nonnulla alia ejusdem generis per symbola demonstrat, minus perspicue, nec brevius quam possint demonstrari oratione plena. Denique capite vicesimo octavo eadem brevius scribit, sed obscurissime. Caput vicesimum no-

DIALOGUS III.

num continet criticismos super vocibus *ratio rationalis*, ῥητὸν, ἄλογον, ἄῤῥητον, ποιὰ σχέσις, *quantuplum*, etc.: quorum criticismorum aliquos superius absurdos esse ostendimus. Itaque caput hoc dimisissem jam, nisi quod præterire non placet, quod dicit *Euclidem quidem in Elemento decimo rationales appellare lineas, quæ potentia tantum sunt commensurabiles: verum alibi non raro obtinet rationalia tantum ea dici, quæ et* σύμμετρα *sunt; ut proinde sit* ἄλογον *sive* ἄῤῥητον, *atque* ἀσύμμετρον. Non enim puto aut Euclidem usquam, aut geometram alium quemcunque, ἄῤῥητον et ἀσύμμετρον pro eodem usurpasse. Non ergo illi credendum esse, nisi authorem et locum indicaverit. Quis enim, qui Elementum decimum legerit, nescit infinitas numero esse quantitates inter se commensurabiles, quæ tamen sint irrationales; propterea quod τῇ ῥητῇ arbitrarie sumptæ commensurabiles non sunt. Pars hujus capitis reliqua continet partem eorum, quæ habet Clavius ad finem Elementi quinti de distributione rationum in suas species, nimirum *multiplicem*, *submultiplicem*, *superparticularem*, *superpartientem*, etc. Præterire autem non possum verba ejus hæc, *Et quidem ipsæ fractiones nihil aliud sunt quam rationes*. Nolo diutius neget se quotientem dicere divisoris esse ad dividendum rationem. Neque hæc, *Fractionis itaque numerator et denominator perinde sunt atque rationis antecedens ad consequens*. Quæ, etsi vera sunt, verbis illius prioribus contradicunt. Neque hæc, *Sunt enim rationes, non minus quam numeri, veræ quantitates*. Nam si quantitates rationum effari cogeretur, necessarium esse videret pro ratione æqualitatis ciphram ponere, id est, confiteri quod

ratio æqualitatis media est inter rationem quam habet quantitas ad quantitatem, et rationem quam habet privatio quantitatis ad privationem quantitatis; et proinde, quantitatem rationis quam habet æquale ad æquale, esse nihil. Sequitur Caput tricesimum, de rationum compositione.

B. Differatur si vis, in diem crastinum.

DIALOGUS QUARTUS.

A. ETIAM hodiernus nobis sermo totus fere erit de *rationibus.* Capite præsente de rationum agit compositione, prout definitur ab Euclide (Elem. vi. defin. ult.): *Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatæ efficiunt aliquam rationem,* in Græco, τινὰ λόγον. Sic enim invenio in libro cujusdam anonymi, edito centesimo abhinc* anno, in quo sunt definitiones et propositiones Euclidis omnes Græce scriptæ. Wallisii liber, ut videtur, loco hujus definitionis hanc habet: *Quando rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquas effecerint.* Quæ duæ lectiones sensu nihil differunt. Nam si duo termini unius rationis multiplicentur in duos terminos alterius rationis, id est, antecedens in antecedentem et consequens in consequentem, orietur ratio ex duabus illis rationibus composita; vel quod idem est, orientur duæ quantitates quarum ratio æquatur

* Edit. 1660 et 1668, "ab hunc."

DIALOGUS IV.

duabus illis rationibus simul sumptis. Itaque compositio rationum est rationum unius ad alteram additio, ut supra ostensum est. Quare compositio rationum de qua hic loquitur Euclides, est ipsissima rationum unius ad alteram additio.

B. Manifestissime. Additio tamen hæc per multiplicationem perficitur.

A. Verum; at non per multiplicationem rationum, sed per multiplicationem terminorum. Termini autem non sunt *rationes*, id est *relationes*, sed *correlata*, quas Euclides hic appellat *rationum quantitates*.

B. Ita est.

A. At Wallisius hæc non intelligit, ut per proxima ejus verba manifeste apparebit; sunt autem hæc :—*Quid per rationum quantitates intelligit Euclides non inter interpretes convenit; num scilicet ipsos terminos, num quod ex eorum comparatione provenit.*—Quæ proveniunt inde, nempe, a multiplicatione terminorum in terminos, habent quidem rationem ex propositis rationibus compositam; termini autem rationum componendarum esse non possunt.

B. Profecto Euclidem hoc loco professor noster non intellexit. Neque, credo, authorem ullum vidit qui quantitates rationum eo modo interpretatus sit.

A. Alias quoque animadverti eum, quæ scripsit dubitans an essent vera necne, *quibusdam*, id est, authoribus anonymis, individuis vagis attribuere. Sed quid tibi videtur oratio hæc : *Utrumvis autem dicatur, perinde est: puta, si rationis* A *ad* B *termini in terminos rationis* α *ad* β *respective ducantur, nempe* A *in* α, B *in* β, *ut proveniat ratio* A

in α *ad* B *in* β*; sive etiam ratio* $\frac{A}{B}$ *ducatur in rationem* $\frac{\alpha}{\beta}$*, ut proveniat* $\frac{A}{B}$ *in* $\frac{\alpha}{\beta}$*, perinde est.*

B. Oratio quidem valde symbolica est, sed quam non intelligo. Nunquam enim multiplicari aliquid audivi, neque imaginari possum, nisi ut fieret vel multiplo major, nempe quando multiplicatio fit per numerum integrum, vel multiplo minor, quando multiplicans est numerus fractus. Non itaque intelligo quomodo aliquid multiplicari possit nisi per numerum integrum vel fractum. Veniam ergo mihi dabit Wallisius, si non intelligam quomodo ratio A ad B duci possit in rationem α ad β. Rationem per numerum multiplicari posse, scio; ut quando ratio multiplicata per 2, duplicatur, et per 3, triplicatur, et per $\frac{1}{2}$, fit ratio rationis sesquialtera.

A. In omni multiplicatione fit ut multiplicans ad unitatem, ita productus ad multiplicatum. Itaque quot continet unitates ratio A ad B, toties $\frac{A}{B}$ in $\frac{\alpha}{\beta}$ continet rationem α ad β. Sanine sunt qui sic loquuntur? Aut professorem talem ferre æquum est academicos, si ad illum expuendum satis haberent virium? Paulo post, cum dixisset rationem duplam componi ex sesquialtera et sesquitertia: (quod verum est, si per rationem duplam intelligit rationem dupli ad simplum; alioqui falsum; nam dupla ratio exponi per pauciores quam tres terminos non potest, ut nec ratio simpla per pauciores quam duos): subjungit, *hoc est, ut loquuntur musici, ex diapente et diatessaron componitur diapason.* Verumne hoc?

B. Equidem artis musicæ imperitus sum. Scio tamen ex diapente et diatessaron componi diapason.

A. Sed a tono imo ad quintum quot numerantur toni?

DIALOGUS IV.

B. Si extremi assumantur, quatuor cum semitonio.

A. A quinto ad octavum quot?

B. Si itidem extremi numerentur, tres cum semitonio. Intercedunt autem inter imum et quintum toni duo et semitonium; inter quintum et octavum, tonus et semitonium, et summus tonus duplo acutior est quam imus.

A. Quomodo autem conveniunt hæc cum compositione rationis sesquialteræ et sesquitertiæ ad faciendam rationem duplam?

B. Nescio, nisi rationum apud musicos et geometras diversa sit computatio.

A. Videri vult scriptor hic omnium artium peritus esse, cum sit omnium quidem artium imperitus; duarum autem, quas profitetur, theologiæ et geometriæ imperitissimus. Quod habet deinde de rationis a ratione ablatione, quam hic vocat ἄνηρ περισσὸς rationis imminutionem, per divisionem, respondit e contrario iis quæ habentur de rationum quæ fit per terminorum multiplicationem compositione; nec poterat id non videre.

B. Sed et aliter ratio a ratione detrahi potest, sine divisione. Nam si ratio 2 ad 3 detrahenda sit ex ratione 4 ad 5, et fiat ut 2 ad 3 ita 4 ad aliam, 6; erit ratio residua ratio 6 ad 5; ut expositis numeris 4, 6, 5, videre est. Nam subducta ratione 4 ad 6, id est 2 ad 3, ex ratione 4 ad 5, relinquitur ratio 6 ad 5.

A. Lego.—*Utrum hæc rationum compositio, additio judicanda sit, an multiplicatio, haud satis videtur apud arithmeticos, vel etiam geometricos, constare.*—Videtur his verbis respicere ad Clavium, qui (ad Prop. 23, El. vi.) contendit, *compositionem*

hanc et detractionem non esse proprie additionem et substractionem; quia alias, inquit idem Clavius, *esset totum æquale parti, et minus; et major proportio posset detrahi ex minore.* Quæ, ut videntur illi, absurda, pluribus exemplis ex opinione contraria deducit (ad finem El. ix).

B. Nescientibus rationis majoris ad minus, id est, quantitatis ad quantitatem, naturam diversam esse a ratione minoris ad majus, id est, privationis quantitatis ad privationem quantitatis, et mediam inter utramque esse rationem æqualium, satis absurde sonat majorem rationem a minore detrahi posse, et totam rationem ejusdem parte esse minorem. Sed si considerare vellent quod qui addit privationi privationem, quantitatem facit minorem, et qui privationem a privatione detrahit, quantitatem facit majorem; facile dici ferrent rationem majorem a minore, et totam a parte posse subtrahi.

A. Erravit, scio, Wallisius, sed cum doctissimo Clavio: doctissimo quidem Jesuitarum, et scriptore omnium sæculorum diligentissimo. Wallisius autem non, ut ille, quæsibundus erravit, sed errorem illius amplecti satis habuit, quomodo quærendum ulterius esset ignorans. Attamen obtinuit, etiam contra sententiam Clavii, ut vocetur compositio rationis, propter vim credo etiam intus latentis veritatis, *additio* potius quam *multiplicatio.* Sed id ægre fert Wallisius; *quia certum est,* inquit, *quantitates invicem multiplicari, non addi:* quasi diceret, *quia compositio rationum fit per multiplicationem terminorum, ergo compositio rationum est multiplicatio rationum.* Itaque paulo post, *designandam autem malim,* inquit, *per notam* × *multiplicationis,*

DIALOGUS IV.

quam per + additionis. Adeoque quæ ex $\frac{A}{\alpha}$ et $\frac{B}{\beta}$ componitur ratio, scribenda est $\frac{A}{\alpha} \times \frac{B}{\beta}$, non autem $\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta}$.

B. Certe non male scribi credo A ad α + B ad β, pro compositione rationum A ad α et B ad β; quanquam pro multiplicatione fractionum male scriberetur $\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta}$, et recte $\frac{A}{\alpha} \times \frac{B}{\beta}$.

A. Ita sane, si modo per symbola scribere omnino necessarium esset. Quod addit: *Adeoque tota illa de fractionum multiplicatione et divisione tradenda doctrina, de rationum continuatione et imminutione pariter intelligenda erit; sunt enim ipsissima eadem res:* promissio est Capitis xlv., de fractionum et rationum rationibus, ab initio usque ad finem absurdissimi. Deinde, *non idem,* inquit, *sonat ratio duplicata, triplicata,* etc., *quod ratio tripla, dupla,* etc. Est in sono, fateor, aliquod discrimen, ut inter dissyllaba et quadrisyllaba; sed tamen idem significant. Nam quicquid duplicatur, fit non minus duplum quam duplicatum; et quod subduplicatur, (ignosce loquenti non Latine), fit non minus dimidium quam subduplicatum. Et ut ratio 1 ad 4 est duplicata rationis 1 ad 2, ita etiam dupla est, nempe ratio defectus duplicata sive dupla.

B. Memini hæc eadem eodem modo explicata esse in colloquiis superioribus, et vera esse satis sentio.

A. Quod autem ratio iterata non dupla dicenda sit sed duplicata, confirmatum putat ab Euclide, qui perpetuo utitur hoc sensu vocibus *διπλασίονα, τριπλασίονα,* etc., non *δίπλουν, τρίπλουν,* neque *διπλάσιον, τριπλάσιον*: sed vim nullam habet; nam utitur *διπλασίονι* in prop. ult. Elem. ix., et in prop. 20, Elem. iii., ad

significandam rationem dupli ad simplum. Non itaque verum est, quod ea utitur perpetuo in sensu altero. Præterea, fieri potest ut Euclides non satis ipse perspexerit rationis naturam: imo vero fieri aliter non potest, cum definierit rationem per ποιὰ σχέσις. DIALOGUS IV.

Capite xxxi., ubi tractat Progressionem Geometricam, regulam affert generalem, qua terminorum omnium invenitur summa, nimirum hanc:—*Si terminus ultimus per communem rationem multiplicetur, sive quod tantundem est, progressio per unum adhuc gradum continuetur, atque inde auferatur terminus primus, et quod restat per numerum unitate minorem quam est communis ratio, dividatur; prodibit progressionis summa.*—Quam regulam *deinceps* demonstraturum se esse dicit. Id autem quod deinceps legitur, demonstratio non est, sed indicatio quod ita contingit esse in progressione numerorum ipsius arbitrio sumptorum. Neque, si in progressione omni numerorum tuo meove arbitrio sumptorum idem contingeret, non tamen demonstratio esset; tum quia causa accidentis non apparet, tum etiam quia inductio particularium, nisi numero infinitorum, regulam non facit universalem.

B. Verba ejus hæc, *regulæ demonstrationem deinceps exponemus*, non spectant ad id quod sequitur, nimirum, *si in progressione adjuncta*, etc., sed ad id quod habetur Capite xxxiii. ad numerum 68, qui incipit, *si terminus maximus*, etc.

A. Ergo vocem illam *deinceps*, toties ubique, præsertim in libris mathematicis occurrentem, criticus mathematicus doctor ille non intellexit.

B. Fortasse regulam tamen quam hic exposuit, illic demonstrabit.

DIALOGUS IV.

A. Certone?

B. Puto. Verum si regulæ demonstrationem aliquam ejus ipse habes, profer quæso.

A. Sciendum prius est, in omni multiplicatione esse ut numerus productus ad numerum multiplicandum, ita multiplicantem ad unitatem.

B. Scio. Nam opus multiplicationis aliud non est quam numerum invenire, qui toties contineat multiplicandum quoties multiplicans continet unitatem.

A. Tenes. Sit ergo numerorum quotlibet continue proportionalium series, A, B, C, D; in qua A sit minimus. Fit ergo B ex multiplicatione A per aliquem numerum integrum vel fractum. Sit multiplicans, primo, integer quem tu vis.

B. Sit multiplicans 3.

A. Est ergo $3\,A=B$; et $3\,B=C$; et $3\,C=D$; et ut A ad B, ita 1 ad 3, ut tu modo ipse demonstrasti.

B. Concedo.

A. Sed in proportionalibus, ut primum antecedens ad primum consequens, ita summa antecedentium omnium ad summam consequentium omnium.

B. Recte.

A. Et in serie proposita, A, B, C, D, omnes antecedentes sunt A, B, C, et omnes consequentes B, C, D. Quare ut 1 ad $A+B+C$, ita 3 ad $B+C+D$. Et proinde $3A+3B+3C=B+C+D$. Et subductis utrinque $B+C$, restabit hinc quidem D, illinc autem $3A+2B+2C$. Habemus ergo æquationem unam, $D=3A+2B+2C$; et sublato utrinque A, æquationem alteram, $D-A=2A+2B+2C$. Quare diviso numero dato $D-A$ per 2, quotiens erit $A+B+C$; cui adjunctus datus D, dat summam quæsitam.

B. Nihil clarius. Sed sit jam multiplicans numerus fractus, puta $\frac{3}{2}$. DIALOGUS IV.

A. Erit igitur $B = \frac{3}{2}A$; et $C = \frac{3}{2}B$; et $D = \frac{3}{2}C$; et proinde ut A ad B, ita 1 ad $\frac{3}{2}$. Item, ut $A+B+C$ ad $B+C+D$, ita 1 ad $\frac{3}{2}$. Quare $B+C+D = \frac{3}{2}A + \frac{3}{2}B + \frac{3}{2}C$. Et sublatis utrinque $B+C$, fit æquatio hæc, $D = \frac{3}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$; et rursus, sublato utrinque A, fit hæc, $D - A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$. Quare diviso $D-A$ per $\frac{1}{2}$, erit quotiens $A+B+C$. Datur autem D: cognita ergo est summa simul omnium.

B. Multo magis perspicua et amœna demonstratio hæc est, quam illa professoris nostri algebrica.

A. Quidni? An comparanda est algebra cum methodo analytica? Sed de demonstratione Wallisiana videbimus inferius.

B. In numeris proportionalibus, terminorum ulteriorum investigatio apud nostrum ærumnosa est. Sed lege quæ sequuntur.

A. Progressionis cujusvis inchoatæ terminum ultimum, a primo satis remotum, invenire.

B. Operatio, inquam, quam docet per notationem exponentium, et iterationem* quam requirit operis, ita ut nisi palpando progredi non liceat, et ignorantia finis odiosa res est. Ostende igitur illius rei methodum certam.

A. Sint continue proportionales A, B, C, D, E. Communis autem multiplicans sit M. Sunt igitur ipsis A, B, C, D, E, æquales A, MA, MMA, MMMA, MMMMA, si modo sumantur eodem ordine, singuli singulis. Vides ergo progressionem generari

---

* Sic Edit. 1668.

ex multiplicatione termini minimi A, primo per multiplicantem communem M; et deinceps, per ipsius multiplicantis potestates ordine ascendentes, nempe, per MM quadratum, MMM cubum, MMMM quadrato quadratum, etc.

B. Video.

A. Et esse quot termini tot potestates ascendentes, demptis duabus; nam M non est potestas, sed radix. Multiplicationes autem tot sunt quot sunt, dempto uno, ipsi termini. Jam datis duobus tantum terminis primis, datur M, nimirum, dividendo B per A. Quæritur autem, verbi gratia, terminus post A quartus. Scribe M quater, ut MMMM. Quia ergo datur M, datur quoque MMMM. Datur autem et A. Datur ergo MMMMA, terminus quæsitus, nempe, quartus incipiendo a B. Multiplicationes enim una pauciores sunt quam termini.

B. Teneo. Et siquidem terminus postularetur centesimus, deberet M multiplicari in se nonagesies novies, et productus in A, ut haberetur terminus centesimus.

A. Ita est. Sed labor aliquanto minor erit, ubi multi sunt progressionis termini, si multiplicatio fiat per potestates altiores. Nam si multiplicans sit 3, non est necesse ascendenti ad cubiculum, multiplicationem incipere a 3: possumus enim incipere a cubo ejus 27, vel ab alia altiore potestate cognita.

B. Sed cur tu pro multiplicante ponis M, cum Wallisius ponat ubique R?

A. In causa certe non est quod libeat ab illo dissentiri, sed ne alios, ut ille, inducam in errorem. Ego enim pono M, literam *multiplicantis* initialem: ille R, literam initialem *rationis*. Nam in progres-

sione, exempli causa, 2,6,18, concedimus ambo communem multiplicantem esse 3, sive R sive M appellatur: ille autem hoc amplius, rationem 2 ad 6 esse 3. Et propterea, quem numerum ego communem multiplicantem voco, appellat ille communem rationem. Unde fit ut nonnulli illius secuti authoritatem, rationem putent esse numerum, nimirum quotientem; quod est erroneum.

B. Imo vero absurdum.

A. Video hic symbola ab illis quibus hactenus usus est, diversissima.

B. Non sunt illa symbola algebrica, sed literæ Arabicæ.

A. Legitne ille Arabica, ut clericus?

B. Nescio. Sed a viro doctissimo et illius linguæ peritissimo accepta libro suo visum est illi Arabica hæc inserere. Nam *progressionis geometricæ exemplum,* inquit, *elegans est, et vetustum et forte omnium primum.* Ostenditur autem hoc exemplo in quam immanem summam per paucas duplicationes excrescit unitas.

A. Ostenditur præterea legisse illum Edwardi primi statutum, *de mensuris Anglicanis*, ut eo transcripto videretur etiam peritus juris. Nam absque his, quæ ad scientiam arithmeticæ nihil pertinent, caput hoc tricesimum primum vix contineret duas paginas.

B. Datis terminis primo et ultimo, quomodo invenitur, quem quis postularet, terminus intermedius?

A. Dato quidem numero terminorum, facillime. Divido enim ultimum per primum, et quotiens erit potestas aliqua ex ascendentibus; nempe, si ultimus fiat a multiplicatione quadrati in terminum

DIALOGUS IV. primum, erit terminus ultimus tertius; si fiat ex cubo in primum, erit ultimus quartus, et sic deinceps. Dato ergo terminorum numero, cognosco quota sit in ascendentibus potestas illa, ex cujus multiplicatione in terminum primum fit ultimus. Diviso ergo termino ultimo per primum, innotescit potestas illa cujus radix propria est communis multiplicans. Exempli causa: si sit progressio data 3, 6, 12, 24, 48, 96; et communis multiplicans M; progressio hæc 3, 3M, 3MM, 3MMM, 3MMMM, 3MMMMM, eadem erit quæ est data. Datur autem numerus terminorum 6. Fit ergo 96 ex potestate quarta in 3, id est, ex multiplicantis surdo-solido in 3. Diviso ergo 96 per 3, habetur multiplicantis surdo-solidum 32, cujus radix propria, nempe 2, est communis multiplicans. Quo multiplicante cognito, quilibet terminus intermedius statim invenitur, ut qui fit ex 3 in 2, vel in 4, vel in 8, vel in 16, etc.

B. Methodus, ut quæ procedit ab ipsa terminorum generatione, recta est.

A Capite tricesimum secundum loquitur de origine et usu logarithmorum, ut ex primis ejus verbis manifestum est, imperite. Verba hæc sunt.—*Est autem ea, quam superiore capite tradidimus, regula (de terminis remotioribus intermediis quasi per saltum inveniendis), maximi quidem momenti regula; non tam ob eum quem jam ostendimus illius usum, quam ob insigniora, quæ inde defluxerunt, commoda. Ex hoc enim fundamento dependet mirificum illud logarithmorum inventum.*—Næ, ille Nepperi inventoris, et Briggii logarithmorum inventorum excultoris, clarissimis ingeniis non multum tribuit, qui principium tam facile inventionis as-

signat, quam est ex datis primis terminis progressionis inventio ulteriorum. Præterea, quod per eam regulam inveniri putet logarithmos terminorum intermediorum, falsum est. Nam e contrario, qui hac utuntur regula, non logarithmos per terminos progressionis, sed terminos progressionis inquirunt per logarithmos datos, nimirum, per potestatum ascendentium indices arithmetice proportionales. DIALOGUS IV.

B. Unde ergo illi in mentem venire potuit tam insigne inventum.

A. Observaverat ille inter duas quantitates extremas, cum mediæ interponi possint tum geometricæ tum arithmeticæ numero infinitæ, quanto plures interponuntur, tanto minus geometricas et arithmeticas inter se differre. Inde, nec aliunde, venit ei in mentem, quod valde multis mediis interpositis in ratione geometrica, totidemque in ratione arithmetica, alteræ ab alteris non differunt nisi in notis numericis a prima adeo remotis, ut postremæ, retentis prioribus, sine damno calculi possint negligi: et per consequens, ea quæ per multiplicationem et divisionem solebant supputari, per additionem et substractionem satis accurate expediri. Quæ deinceps scribit Wallisius de logarithmorum usu, pauca sunt, et transcripta ex initio libri de logarithmis editi a Briggio.

B. Videamus jam ea quæ continentur in Capite xxxiii., de Progressione Geometrica per symbola.

A. Toto hoc capite difficultas, præter eam quam faciunt ipsa symbola, fere nulla est. Itaque unius tantum theorematis demonstrationem examinabimus, in qua regulam demonstrare conatur, qua vulgo utuntur qui quærunt summam progressionis

DIALOGUS IV.

geometricæ datæ. Ait ergo (ad Art. 68), *Si terminus maximus in communem rationem ducatur, et ex producto auferatur terminus minimus, residuumque per rationem communem unitate minutam dividatur; quotiens exhibet totius progressionis summam, hoc est,* $\frac{UR-A}{R-1}=S$.

B. Ita. Nam U est terminus ultimus, R communis multiplicans, A terminus minimus.

A. Pergamus.—*Quis,* inquit, *hanc primus invenerit regulam, plane ignoro; et quidem utut ea plerique utantur, non memini tamen me illam uspiam demonstratam vidisse; cum tamen vel maxime demonstratione indigeat. Nobis ergo hanc libuit demonstrationem comminisci.*

B. Lege demonstrationem ipsam.

A. Ponamus, inquit, *numerum terminorum,* T=4. *Adeoque* ART=AR4. *Et dividenda proponatur* (AR4—A) *per* (R—1). *Cum igitur sit* R) AR4, (AR3.—Non amplius intelligo quid sibi vult.

B. Dicit, si quantitas facta sit ex multiplicatione A in R, et producti in 4, quotientem esse factum ex A in R, et producto in 3.

A Non vult hoc, sed aliquid aliud.

B. Nescio; sed aliis in locis symbola similia id significant quod dixi. Ut *Pag.* 172. *l.* 23, ubi sic loquitur, *quoniam* F) ABF (AB, *scribo in quotiente* AB. Hoc est ABF diviso per F, quotiens erit AB.

A. Recte quidem illud; falsum ergo hoc, R) AR4 (AR3. Nam R) AR4 (A4 verum est. Si enim A4 in R facit AR4, etiam AR4 divisus per R, dabit quotientem A4.

B. Videtur hic lapsus esse aliquis vel festinantis calami, vel typographi.

A. Sive lapsus sit, sive arcanum aliquod artis symbolicæ, vim certe habet omnem demonstrationis hujus ulteriorem examinationem præcidendi. Transiliemus Caput tricesimum quartum, ut quod nihil aliud est præter earundem demonstrationum breviorem, et fere totam symbolice scriptam, synopsin cæcam. Caput tricesimum quintum est Elementi quinti Euclidis demonstratio arithmetica; quod quidem Elementum symbolice cuilibet et suis symbolis transcribere, facile est. DIALOGUS IV.

B. Quid? Demonstrationes ejus nihilne aliud sunt præter transcriptiones?

A. Non id dico; sed cum facile sit demonstrationes Euclidis una cum definitionibus ejusdem scribere symbolice, facilius est theoremata ejus inferre ex assumpta sine demonstratione hypothesi. Nam cum totum illud Elementum quintum ex definitione dependeat *ejusdem rationis*, ille, neglecta definitione Euclidis, loco ejus substituit hanc: *æqualitas sive identitas rationis est æqualitas sive identitas quotorum.* Deinde subjungit: *puta, si sit* $\frac{\mathrm{a}}{\alpha} = \frac{\mathrm{b}}{\beta}$, *est et* a : α : : b : β, *et contra; quod nobis erit definitionis loco.* Similiter, rationem majorem et minorem definit sic: *ubi quotus major est, ibi ratio major; ubi minor, minor est.*

B. Propositio est, definitio non est. Quanquam autem definitio non sit, sed propria passio, vera tamen erit demonstratio.

A. Erit, modo ipsa passio fuerit prius demonstrata.

B. Demonstrata est Capite xxxiii, per propositionem 16 Elem. vi. Euclidis, nempe, *si quatuor quantitates fuerint proportionales, factum ab ex-*

tremis æquatur facto a mediis, et contra. Sed hoc Euclides in lineis, Wallisius in numeris demonstrat.

A. Quid opus erat? Nam numerorum rationes omnes accommodari possunt lineis, quanquam contra, non omnes rationes linearum competant numeris. Sunt enim lineæ multæ inter se incommensurabiles; numeri autem incommensurabiles esse non possunt. Sed videamus ipsam demonstrationem. Capite tricesimo secundo, quo amandamur, nihil est quod eo respicit.

B. Quære in Capite tricesimo tertio, quod totum est de continue proportionalibus. Lege propositionem vicesimam primam.

A. *Continue proportionalium, si duorum quorumvis rectangulum per terminum primum dividatur, prodibit terminus, cujus index, sive distantia a primo, æquatur illorum indicibus simul sumptis.* Quod verum est. Dum autem propositionem ejus hanc vicesimam primam percurro, intelligo quid significant symbola propositionis sexagesimæ octavæ ejusdem Capitis. Nam R) AR 4 (AR 3 hoc significant, quod diviso numero qui fit ex A* in 4, et ex producto AR multiplicato per potestatem cujus index est 4, quotiens erit factum ex AR in potestatem cujus index est 3. Quod non negatur. Sed hoccine est demonstrare, nimirum rem ita obscure enuntiare, ut a nemine intelligi possit, nisi qui non modo illius norit symbola, sed etiam methodo naturali idem potest demonstrare?

B. Etsi propositionem veram esse ex tua perspexi demonstratione, nescio tamen an illius demon-

* Sic Edit. 1660 et 1688.

stratio sit legitima. Lego enim symbolica ista ut pueri Homerum, quibus ad singula vocabula adeundum est lexicon. Illud autem AR 4 ne in lexico quidem est.

A. Sit quidem vera demonstratio. At quomodo transferri potest ad proportionales, quæ nec continuæ sunt, nec in eadem serie continuarum, quales sunt 2 : 4 : : 3: 6, vel 3: 9 : : 4 : 12 ; ubi distantiis et indicibus locus non est? Nondum ergo propositionem illam (Eucl. vi. 16) demonstravit.

B. Redeamus ad Caput xxxv, unde frustra digressi sumus.

A. Imo transiliamus et illud, et proximum illi xxxvi. Credo enim Elementum quintum ex hypothesi, quam ille assumpsit, aut recte demonstratum esse, aut si vitium aliquod irrepserit, præter ipsam scriptionem symbolicam, non illius imperitiæ, sed typographo vel transcriptori tribuendum esse. Est autem Caput xxxvi ejusdem Capitis xxxv brachystenographia. Caput xxxvii unicum habet problema hoc, *datis tribus proportionalibus invenire quartum ;* quæ est Regula Aurea. Cujus constructio hæc est ; *tertius multiplicetur per secundum, et productus dividatur per primum.* Quæ vera, et vulgo recepta est. Demonstrans autem sumit, quod Capite xxv loco definitionis nullo jure habuit, *ubi quotientes sunt æquales, ibi rationes sunt eædem : et ubi quotiens major est, ibi major ratio; ubi minor, minor.*

B. Si sint duo quotientes æquales, exempli causa, numero 4, qui est quotiens divisi 20 per 5, æqualis sit 4, quotiens divisi 12 per 3 ; dicit ergo 4 ad 4 esse in eadem ratione ; quod non intelligo,

DIALOGUS IV.

nam aliquid deest. Forte hoc vult; eandem esse rationem 20 ad 5, et 12 ad 3; vel $\frac{20}{5}=\frac{12}{3}=4$.

A. Improprie quidem loquutus est; verum autem est quod demonstrare voluit, nec fecit. Postquam enim dixisset, cum sit A : α : : B : β, subjungit, *hoc est* $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}$: quod nondum constat, sed erat prius demonstrandum. Argumentatio ex concessa hypothesi satis procedit; sed demonstratio non est.

B. Regula Aurea quomodo aliter demonstrari potest?

A. Eo modo quo demonstratur ab Euclide (Elem. ix. 19). Vel sic; numeri plani sunt rectangula sub rectas, quarum partes aliquotæ numerantur. In duobus autem rectangulis æqualibus, ut latus unum primi ad latus unum secundi, ita latus reliquum secundi ad latus reliquum primi. Quare in numeris planis æqualibus, est ut factor unus primi ad factorum utrumvis secundi, ita coefficiens secundi ad coefficientem primi. Si dentur ergo tres numeri A, B, C, et quæratur D; quia factus ex A in D æqualis est facto ex B in C, divisoque AD per A proveniet D, etiam diviso BC per A provenit idem D. Quæ est Regulæ Aureæ demonstratio naturalis. Nullus enim numerus rerum æqualium, quales sunt partes aliquotæ, multiplicatus per numerum, producit numerum alium quam numerum rerum numeratarum; propterea quod ratio æqualitatis, cum ipsa non sit quantitas, non addit neque detrahit quantitati rationum, quam habent ipsi numeri.

B. Satis clare. Sed putaram potuisse fieri aliquanto brevius.

A. Nescio, nec credo; melius est autem quod probandum susceperis, pluribus verbis manifeste

demonstrare, quam paucioribus non demonstrare. Sequitur Aureæ Regulæ praxis, id est, exempla operationis vulgaria. Deinde, exemplum aliud, ubi quæritur *quota hora sit Athenis quando est Oxoniæ octava:* cujus praxis nulla esse potest, nisi iis qui sciunt doctrinam sphæræ, et circulorum quos in illa finxerunt astronomi. Ii vero nulli sunt, qui non regulam hanc ante didicerunt. Non erat ergo arithmetici hoc docere, cujus est omnia docere abstracte a rebus numeratis, id est, universaliter. Deinde, quod monitum lectorem voluit, *ne quando fraudi sit, quod ea tanquam proportionalia habeantur, quæ proportionalia non sunt*, ad arithmeticam non pertinet, sed ad philosophiam, ut ex suo ipsius exemplo est manifestum. *Posito*, inquit, *quod pondus, gravitate sua motum, duobus temporis momentis* 20 *pedes descendat; quæratur quot pedes descensurum sit momentis* 10. *Si fiat multiplicatio numeri tertii per secundum, atque divisio producti per primum, prodibit quartus*, 100. *At ille numerus quæsito non satisfacit.*

B. Nonne ergo Regulæ Aureæ definitio, tradita initio hujus Capitis, falsa est?

A. Minime. Sed numerus qui in una quæstione secundus est, in alia debet fortasse esse tertius. Præterea, quæritur aliquando, datis tribus numeris, quis sit ad tertium in ratione primi ad secundum duplicata vel triplicata, pro ratione rerum numeratarum; ut in hac ipsa quæstione, ubi gravia non percurrunt spatia in eadem ratione, sed in duplicata momentorum temporis; ut a Galileo demonstratum est in Dialogis de Motu; id quod Wallisius nesciit. Qua ratione descendunt gravia, vel fluida e vase effluunt, non est arithmetici docere, sed physici.

DIALOGUS IV.

B. Sed qui obiter physicum theorema docet arithmeticus, an culpandus est?

A. Non: parergon est, si doceat. Sin libro arithmetico inferat, neque demonstrat neque conetur demonstrare, quod fecit ille, ineptum est. Quæ sequitur per tres paginas, est præcedentium symbolica scriptio. Deinde, ostendit quomodo multiplicari, in regulæ aureæ operatione, possint inter se duæ quantitates heterogeneæ, vel una per alteram dividi possit; puta, quomodo pondus in lineam multiplicari, vel per eam dividi possit; dicitque utrumque fieri per reductionem utriusque quantitatis ad numeros; et quidem recte.

B. Sed nonne fieri potest etiam per reductionem ad lineas, cum ipsi numeri ad lineas reduci possint? Præterea fieri potest ut pondus ponderi sit incommensurabile: tunc autem reduci ad numeros non possunt, ad lineas possunt.

A. Commodius certe reducunter ad lineas. Sed ille quanquam non satis, non male tamen fecit.

B. At ille Hobbium, quia rationem ponderum et linearum mediantibus lineis permutavit, accerrime increpat in *Elencho.*

A. Tanto ille nequior. Venimus jam ad Auream Regulam inversam sive reciprocam, quam docet Capite xxxviii. *Ubi expositis,* inquit, *tribus quantitatibus, quæritur quarta reciproce proportionalis.*

Demonstrationem regulæ hujus deducit ab eo, quod in rectangulis æqualibus latera sunt reciproce proportionalia. Quod quidem recte fecit, sed necessario. Fateatur ergo hic, quod negavit ante, arithmeticam a geometria, non contra, geometriam ab arithmetica dependere. Cætera transeo, cum

sint trita. Sequitur Caput xxxix, de Aurea Regula composita; quam primo per duas operationes, deinde per unicam absolvit, sed non demonstrat. Nam ratiocinatio ejus ex eo dependet, quod regula composita ea est, qua, datis quinque numeris, invenitur sextus, ad quem ita se habeat tertius, ut factus ex compositione rationum primi ad tertium sibi cognominem, et secundi ad quartam sibi quoque cognominem. Ratio enim effectuum componitur ex rationibus causarum singularum unius ad singulas causas alterius ejusdem generis; ut hominum ad homines, et mensium ad menses. Itaque, ut exemplo utar quod ipse adfert, *si* 4 *academici in* 3 *mensibus expendant* 20 *libras; quiot libras expendent academici* 6 *in mensibus* 12. Numeri dati sunt quinque; 4 academici, 6 academici, 3 menses, 12 menses, 20 libræ. Scribantur ergo $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{12}$. Ratio jam quæ oritur ex compositione rationum 4 ad 6, et 3 ad 12, est ratio 12 ad 72. Quare ut 12 ad 72, ita est 20 ad quæsitum. Multiplicatus ergo 72 per 20, fit 1440; qui divisus per 12, dat quæsitum 120. Caput xl, de regula societatis, nihil habet in neutram partem singulare; itaque transiliri potest. In Capite xli, ubi tractat de numeris fractis, noto primo hæc verba; *supponit arithmetica unitatem, sive unum, numerorum primum esse;* quod est falsum. Supponit hoc Wallisius, non supponit arithmetica; nam unitatem Euclides numerum esse negat. Sed quæstio hæc non magis ad arithmeticorum, quam ad vulgi cognitionem pertinet. Et quid de ea sentiendum sit, a nobis satis disputatum est supra ad Caput iv. Secundo, verba hæc: *Unum aliquod in partes dirimendum, vero aliquo*

DIALOGUS IV.

numero designari non potest: nam et hoc falsum est; quia tres quartæ partes unius cujuslibet rei non minus verus est numerus, quam tres quartæ partes unius octonarii. Et simpliciter, tres partes sunt æque verus numerus ac tria tota. *Sed pro veris numeris haberi*, inquit, *non solent.* Neque hoc concedo.

B. Sed probat ex eo, quod *sub numeri appellatione apud Euclidem non censentur.*

A. Quia numerus hominum sub appellatione numeri apud Euclidem non censetur, ideone sequitur quod numerus hominum non est numerus? Cur autem numerus hominum magis est numerus quam numerus partium unius hominis?

B. Nescio, sed perge.

A. Hoc quoque animadversione dignum est, quod dicit, *ex imperfecta et impossibili radicum extractione oriri numeros surdos* $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, *etc.* Numerus enim nullus est, qui non est in progressionis hujus arithmeticæ serie, 1, 2, 3, etc.: si continuetur quantum potest.

B. Nihil manifestius. Sed ignosce.

A. Quidni? Condonamus ei non modo hanc, sed omnem ejus, quantacunque sit, ignorantiam; sed falsa corrigentibus liceat vera investigare. Fractionem mox laboriose definit esse, *qua unius integri pars indicatur, quæ ad totum illam rationem habet, quam habet fractionis numerator ad denominatorem.*

B. Male hoc. Ni enim cognitum prius sit quid sit *fractio*, cognosci non potest quid sit *numerator*, aut *denominator fractionis.*

A. Poterat brevius, verius, et plenius, naturam

fractionis explicasse sic: *fractio est numerus partium; propria quidem unius; impropria vero plurium quam unius.*

B. Accurate.

A. Deinde verba hæc, *sed et hinc etiam patet rationum et fractionum identitas sive affinitas maxima,* illorum sunt qui quid accurate dicendum sit ignorant. Vox enim illa *affinitas* mathematicorum non est. Si ratio et fractio eadem res sit, quid opus est loqui de affinitate? Si diversæ, quomodo affines?

B. Quia fractio rationem indicat dividendi ad divisorem.

A. Horologium indicat horam. Quare ergo non est horologii et horæ vel identitas, vel saltem maxima affinitas? Non ita ratiocinari solent mathematici. Porro hæc, *quippe nil aliud sunt fractiones quam rationum denominatores,* accurata non sunt. Nam fractio denominat numerum certum certarum partium, ut $\frac{3}{4}$, id est, tres partes quartas; qui numerus est absolutus: ratio autem quantitas est non absoluta, sed comparativa. Non ergo denominat fractio rationem, sed ostendit quantitatem numeri absoluti, ut 3, comparati cum numero absoluto, ut 4.

B. Non video quomodo hæc negari possunt. Neque quicquam illum juvat quod deinceps habet, nimirum, *quod Aurea Regula rationum rationes comparat;* et *quod opus sit arithmetici non minus rationum, quam numerorum rationes contemplari.*

A. Caput xlii. est de additione et subductione fractionum. Quod de additione dicit earum fractionum, quarum idem denominator est, verum est: et quidem demonstratum esset, nisi medium ipsum,

DIALOGUS IV.

quo utitur ipse, alias negasset.—*Numeri,* inquit, 2 *et* 3, *simul additi constituunt* 5, *quæcunque res illæ sint quæ numerantur, puta, sive integra sive partes. Et qua ratione* 2 *et* 3 *homines sunt* 5 *homines, etc., eadem plane ratione* 2 *et* 3 *semisses sunt* 5 *semisses.*—Cum ergo 2 et 3 homines sunt verus numerus; etiam 2 et 3 semisses, vel etiam 2 et 3 centesimæ sunt verus numerus; sunt autem fractiones; est ergo fractio verus numerus. Quod cum ille in præcedentibus semper negaverit, propositum non demonstravit. Ostendit paulo post, duarum fractionum diversos habentium denominatores, ad duas alias quæ denominatorem eundem habent, reductionem. Exemplo utitur $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$, quas fractiones ad eundem denominatorem reduci demonstrat, nempe, ad fractionem hanc $\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$: et quidem, cum aliis plerisque, recte. Adeoque mirum est, quod non viderit fractiones et rationes quantum differunt. Nam si ratio $\frac{1}{3}$, id est, juxta illum ratio 1 ad 3, addatur rationi $\frac{1}{4}$, id est, ut illi placet, rationi 1 ad 4, summa erit ratio $\frac{7}{12}$, id est, ratio 7 ad 12: quod manifeste falsum est. Si enim ratio 1 ad 3 addatur rationi 1 ad 4, summa erit ratio 1 ad 12, id est secundum Wallisium, $\frac{1}{12}$. Itaque æquales inter se erunt $\frac{7}{12}$ et $\frac{1}{12}$. Vel componendo rationes eo modo quem docet Euclides, erunt $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$. Similiter, fractio $\frac{1}{2}$ addita fractioni $\frac{1}{2}$, duplicatur, et fit 1. At ratio 1 ad 2, addita rationi 1 ad 2, duplicatur, et fit ratio 1 ad 4. Sunt ergo per illum, qui fractionem et rationem pro eadem habet re, $\frac{1}{4}$ et 1 inter se æquales. Quod vides quam sit absurdum. Sed absurda quæ in ipsis numeris satis patent, descripta symbolis symbolorum imperitos, quæ est utilitas sym-

bolorum, facile fallunt. Neque, si non fallerent, quicquam valerent symbola nisi ad obscuritatem alioqui clarissimis inducendam. DIALOGUS IV.

Sequuntur Caput xliii, de fractionum multiplicatione et divisione, et Caput xliv, de fractionum reductionibus; in quibus ut nihil falsum, ita nihil novum reperimus, neque in demonstratis neque in demonstrationibus. Caput ultimum Epilogus est, quo præcedens opus arithmeticum se dicit absolvisse. Doctrinam enim de rationum rationibus traditam esse ait in doctrina fractionum; quod quam recte factum sit, audisti modo. Et siquidem ipse huic doctrinæ theoremata ulla superstruxisset, absurda ea esse intellexisset ipse.

B. Non puto. Nam hæc doctrina fundamentum est totius fere tractatus illius, quem inscripsit *Arithmeticam Infinitorum;* quem tractatum una cum tractatibus de *conicis sectionibus* et de *angulo contactus*, mecum attuli ut examines. Nam illos examinari cupio.

A. Examinabo. Sed ad *opus integrum arithmeticum* desunt adhuc *regulæ alligationis* et *falsæ positionis: quarum altera*, inquit, *tum aliis de causis, tum quod illa non adeo frequentis usus sit, altera sine magno dispendio post introductam arithmeticam speciosam, careri* possit.* Quod utrumque falsum est. Nam et regulæ alligationis apud mercatores usus est satis frequens; et regula falsæ positionis, cum dependeat ab hoc theoremate, *ut unum falsum suppositum est ad errorem a se natum, ita alterum falsum suppositum est ad errorem itidem a se natum*, demonstrari potest sine algebra. Demonstratio longiuscula est. Sed

* Sic Edit. 1660 et 1668.

legere eam poteris in fine Libri quinti Bartholomæi Pitisci, de Triangulis.

B. Legam.

A. Sed deest etiam ad *opus arithmeticum integrum*, methodus inveniendi radicem cujusque potestatis datæ: item ars analytica, nisi illa arithmeticæ pars, vel regula aliqua, non sit. Quæ an recte prætermisit, item an ea quæ tradidit recte tradidit, tuum est considerare.

B. Restat adhuc percurrendus tractatus Elenchticus contra Meybomium, *de Proportionibus*, una cum dedicatione. Dedicatio paginas habet quinquaginta; opus dedicatum, sexaginta duas.

A. Scio. Sed non est illa tam dedicatio, quam laborantis lapsum suum in conicis corrigere miserabilis labor et perplexitas.

B. Scripserat, *Sect. Con.* prop. 47: *In paraboloide cubicali diametros esse sibi invicem parallelas:* quod Robervallus illi falsum esse indicavit. Lege ergo, ut sciamus si quid afferat nunc quod sit rectius.

A. Non est tanti tota geometria; sunt enim paginæ sequentes duodecim, quibus quæritur æquationis, nescio cujus, radix *q*, adeo stigmosæ symbolisque scribillatæ, ut nulla humana patientia examinari possint. Illas igitur abominans prætereo; præsertim cum diametrum paraboloidis cubici ne sic quidem inventam esse dicat. Sed æquatio illa cujus radix est *q*, (*q* autem quid sit nescio), illum vexaverat; itaque homo vindictæ amans ulcisci parat. *Nempe*, inquit, *vexanda adhuc est æquatio illa quæ nos vexavit hactenus, ut tandem quid certi prodat.* Assimulansque Proteo æquationem, ea occasione usus, versus ex Homeri *Odyssea* plus-

quam duodecem inseruit. Deinceps autem resumptam eandem æquationem vexat frustra, nec quidquam adhuc certi prodit Proteus.

B. Transeamus ergo ad ea quæ habet contra Meybomium.

A. Prætereo illa quæ ex Meybomio affert proprium inventum extollente; (nam et Wallisius non minus gloriose, et multo magis contumeliose, scribit quam Meybomius); et illud, quod non satis distinguat Meybomius inter τὸ ἀπὸ et τὸ ὑπὸ: quia propero ad ea quæ scribit de natura rationum. Primum igitur quod reprehendit Wallisius, est quod Euclidis illud in definitione rationis, ποιὰ σχέσις, vertit per *certa quædam relatio,* propterea quod ποιὸν *qualitatem respicit.* Si quid peccavit hoc loco Meybomius, peccatum est quod illud, quod Euclides insignificanter dixerat, id voluit dicere accuratius. Verteret Wallisius *habitudinem qualitativam,* quanquam *qualitativa* vox Latina non sit, neque intelligibilis. Habitudo autem in qualitatibus nihil aliud est quam habitus, id est, facilitas agendi consuetudine acquisita. Hoc, inquam, ita est Latine. Ergo, secundum Wallisium, ratio est *duarum magnitudinum homogenearum ea quæ, secundum quantitatem, est facilitas agendi consuetudine acquisita.* Qua definitione quid potest esse magis ridiculum? Non respexit Euclides ad prædicamentum qualitatis, in voce ποιὰ, sed ad vocem in enuntianda rationum similitudine vulgo usitatam, οὕτως ἔχει, ut in præcedentibus notavimus; atque inde definit rationem per *aliquem habitum,* seu, quod hoc loco idem est, per habitum quendam, (subaudi, nescio quem). Rectius ergo Meybomius rationem definivit quam aut Wallisius aut ipse

Euclides. Quid enim ratio aliud est, quam magnitudo unius quantitatis, quatenus ad aliam comparatur?

B. Nihil.

A. Sed vide Wallisii super hæc scholiastæ verba, Latine ab ipso versa, subtilitatem. Verba sunt hæc: *est autem alia, quæ dicitur relatio secundum excessum et defectum.*

B. Quid? Aliane ratio, an alia relatio?

A. ἄλλη σχέσις, id est, *alia habitudo.*

B. Cur ergo non vertit per *alia habitudo*, sed per *alia relatio?*

A. Quia ratio, quæ hic innuitur, ea est quam vulgo vocant rationem arithmeticam, quam Wallisius negat esse rationem. Itaque homo subtilis, sententiæ suæ convenienter locum vertens, maluit *relationem* dicere quam *habitudinem*, quæ vox est in definitione rationis. Deinde paulo infra, præviso quod non inepte quærere quis posset, *an insit in ratione qualitas aliqua;* respondet, *ut figurarum magnitudo ad quantitatem spectat, ita figurarum species spectat ad qualitatem.* Quasi aliud in figuris compararent geometræ præter quantitates; aut esset aliqua ratio magnitudinum quæ esset qualitas. Illæ ipsæ ratio et inclinatio, propter quas figuram qualitatibus accenseri poscunt, ambæ sunt quantitates, nec ut *quales*, sed ut *quantæ* considerantur a mathematicis. Quod Meybomius *quantum* a *quoto* non distinguat, ab Wallisio recte reprehenditur. Deinde, quod Meybomium reprehendit, quia in locis aliquot veterum, ubi emendatio debebat fieri per διπλασίονα, emendat per διπλάσιον, merito fecit. Sed quod Meybomius idem significare censuerat διπλασίων et διπλάσιος, recte censuit; Walli-

sius autem id negando, imperitum se ostendit linguæ Græcæ, etiam ejus qua utuntur geometræ, ut in verbis ab ipso recitatis manifestum est, οὐ λέγει ὀτὶ δύο λόγοι τοῦ ἑνὸς διπλάσιοι εἰσὶ, καὶ τοῦτο μεν γὰρ,* ἀλλα ὑτὶ ὁ λόγος ὁ ἐκ τῶν δύο διπλασίων ἐςὶ: id est, *non dicit duas rationes unius esse duplas, quod tamen est verum, sed rationem ex duabus compositam esse duplicatam.*

B. Non capio. Vellem professor noster ostendisset quare duæ rationes æquales compositæ non faciunt rationem unius duplam, et quare duplum simpli non sit ejusdem simpli duplicatum.

A. Sed harum vocum alium sensum esse dicit apud mathematicos.

B. Credo.

A. Et ego, etsi non semper, tamen sæpissime ita esse. Id quod ex eo contigit, quod, ut dixi ante, non ausi sunt rationem minoris ad mediam duplam esse dicere rationis ejusdem minoris ad maximam. Quæ tamen magnitudine dupla est, quamquam numero rationum dimidia; ut ratio 1 ad 2 dupla est rationis 1 ad 4 quantitate, etsi contra, ratio 1 ad 4 dupla sit, si spectes rationum numerum: id quod sæpe alias dixi, nimirum, in rationibus minoris ad majorem, quæ sunt rationes defectus, multiplicatio rationum quantitatem rationis minuit, divisio auget. Deinde, quod Meybomius dicit, *Si rationum magnitudo sit exploranda, illa major est, cujus termini longius inter se distant,* falsum est: nam 1 ad 2 majorem habet rationem quam 1 ad 4; cum tamen termini 1 et 4 longius inter se distent quam 1 et 2. Quod etiam vidit Wallisius. Rur-

* Sic Edit. 1660 et 1668.

sus, Meybomius reprehendit definitionem Euclidis (Elem. vi. 5) ut falsam; non recte: poterat tamen ut non definitionem; nam potest demonstrari.

B. Et demonstravit Hobbius.

A. Vidisti jam quam sunt naturæ rationum, de qua litigant, ambo ignari.

B. Reliqua ergo ne examines. Attuli autem mecum alterum illum librum ejus, *De Angulo Contactus*, *De Sectionibus Conicis*, et *De Arithmetica Infinitorum*: ut cum perlegeris, excutiamus sicut hunc.

A. Libet autem, antequam discedas, videre utrum recte reprehenderit Mersennum. Mersennus, in Cogitatis Physico-Mathematicis, *Proportio*, inquit, *æqualitatis, nihili similitudinem refert. Proportio majoris inæqualitatis attollitur supra nihilum. Proportio minoris inæqualitatis deprimitur infra nihilum.* Contra hæc, ea quæ affert Wallisius continentur omnia his verbis: *Qui simplum dicit, non ille rem nullies apponi intelligit, sed semel; et qui subduplum poni dicit, non aliquid auferri dicit, sed saltem semissem poni.* Quæ satis illos quidem redarguerent, qui simplum, vel semissem, vel trientem nihil esse dicerent, vel quantitatem habere nullam; sed contra Mersennum, qui nihil horum dicit, sed semissem, trientem, etc., aliquid esse et quantitatem positivam esse concedit, nihil faciunt. Nam illius verbis, non semissem neque trientem, etc., aliquid esse negatur, sed tantum semissis sive trientis, etc., ad integrum rationem quantitatem habere, id negatur. In legendis ergo mathematicis non nimis est acutus.

B. Sed nosti juxta sententiam Wallisii, semissem, et semissis ad totum rationem, eandem esse rem.

A. Scio. Vidimus jam in hac parte operis mathematici, professoris vestri quot sunt errores: scilicet, plures quam censor ullus, quantumvis severus, in omnibus scriptis omnium mathematicorum editis invenire potest. DIALOGUS IV.

B. Id quidem nescio. Verum si de omnibus simul doctrinæ partibus judicium facies, non mediocriter doctum esse existimabis. Theologus enim est, et logicus, et physicus, et metaphysicus, et politicus, et ethicus, et peritus juris Romani et Anglicani. Præterea, linguas novit Hebræam, Arabicam, Teutonicam, Gallicam, Italicam, Armoricam, quarum specimina et criticismos vidisti in hoc libro; et præterea symbolicam, quæ, ut lingua quædam universalis, est instar omnium.

A. Vidimus quidem videri velle hæc nosse, neque quicquam aliud præter errores et nugas nosse.

B. Liber hic alter, quem examinaturi sumus, videbitur tibi fortasse melior. Vale.

DIALOGUS QUINTUS.

A. Bene advenis; sed te expectabam heri.

B. Venire non potui. Tu vero tanto plus habuisti otii librum, quem tecum reliqui, perlegendi.

A. Perlegi, nisi quod tractatus *de Sectionibus Conicis* capita aliquot, quæ symbolis nimium im-

pedita erant, transilui; et tractatus *de Arithmetica Infinitorum,* cum capita prima et reliquorum omnium fundamenta falsa esse invenissem, cætera legi quidem, sed examinare nolui. Capite primo *de Angulo Contactus,* occasio declaratur controversiæ de natura ejus inter Clavium et Peletarium, nempe propositio decima sexta Elementi tertii Euclidis, una cum demonstratione ejusdem. Propositio quidem Græce et Latine, (Græce in eorum forte gratiam qui Latine nesciunt), demonstratio Latine tantum repetitur. In secundo, controversiam illam ostendit diremptam ab Euclide non esse. Nec mirum; Euclides enim de futura super verbis ejus tanto post tempore inter Peletarium et Clavium controversia ne somniavit quidem. Capite tertio, controversiam intimius, (ut ille parum Latine loquitur), aggreditur: anguli plani definitionem afferens hanc; *angulus,* inquit, *planus est mutua* κλίσις, *seu inclinatio, duarum linearum in plano sese tangentium et non in directum positarum.*

B. Definitio quidem Euclidis est. Sed anguli plani natura ubi explicatur?

A. In ipsa definitione.

B. At non agnosco; nam repugnat iis quæ idem scripsit Euclides (Def. 5, Elem. xi). Ibi enim definit *rectæ lineæ ad planum inclinationem, item plani ad planum inclinationem, esse angulum acutum.* Cum ergo omnis inclinatio ad planum sit inclinatio ad lineam in plano, erit, per hanc definitionem, omnis angulus acutus.

A. Sed non videtur vox *inclinatio* eodem sensu accipienda esse hic, atque in Elemento undecimo. Scias ergo nonnullos esse qui, etsi a positis principiis nunquam non recte ratiocinentur, ipsa tamen

DIALOGUS V.

principia non satis feliciter semper ponunt. Oportuit prius definitum esse quid sit inclinatio, quam per *inclinationem* definiisset angulum planum. Quod cum non fecerit, in causa fuit quod Wallisius frustra se torserit in vocibus κλίσις et ἀκλισία. Sapit enim definitio Euclidea plus quam satis de vulgi imaginatione anguli, cum dicant hoc vel illud *non factum esse in angulo.* Sic quoque accipit Clavius, cum contra Peletarium disputans, angulum rectum majorem esse dicit quam est angulus semicirculi, ut totum quam pars; deceptus eo quod superficies aliqua intercipi videtur inter arcum et tangentem. Itaque naturam anguli, vulgi more, in arcta quadam superficie consistere arbitrabatur: quod est falsum.

B. Imo vero, adeo absurdum, ut nemo illud unquam aperte dicere ausus sit; quanquam, inhærente illa falsa imaginatione, id dixerint ex quo inferri possit.

A. Audiamus Wallisium.—*Et quidem ipsæ lineæ concurrentes, quamvis totæ forsan inclinentur ad invicem, angulum tamen non alibi quam in ipso puncto concursus formant.*—Nonne hinc sequitur, ipsa puncta formare angulum?

B. Plane. Et siquidem punctum sit, ut vult Wallisius, nihil, duo nihila formabunt angulum.

A. Videntur mihi duæ lineæ, etiamsi non concurrant, si tamen eadem regula qua generantur productæ, concursuræ sint, angulum efficere.

B. Hoc quomodo sit possibile vix intelligam, nisi sciero quis sit quem tu appellas angulum.

A. *Angulum simpliciter,* excluso angulo contactus, appello, *lineæ, quæ circulum describit, conversionis totius portionem: anguli autem quantitatem, quantitatem arcus quolibet tempore*

DIALOGUS V.

descripti. Itaque qui dicunt angulum duabus rectis e centro contineri, non superficiem, sed arcum contineri intelligunt, vel intelligere debent.

B. Itaque quidem censeo: nec Wallisius aliter sentire potest, quicquid tuendæ existimationis causa dixerit in contrarium.

A. Itaque angulum contactus angulum simpliciter dictum non esse, ex eo probandum erat, quod recta circulum tangens nullum abscindit arcum. Wallisius autem hoc partim ex Pelitario, partim ipse ex eo probare vult, capite quarto, quod lineæ illæ non sunt una ad alteram inclinatæ, quamquam quid sit inclinatio adhuc nesciatur. Inclinationem autem in angulo contactus nullam esse, satis quidem, sed operationibus a motu circulari deductis tandem demonstrat. Ex quo nihil aliud efficitur, præterquam quod angulus contactus non sit angulo simpliciter dicto homogeneus. Quod quidem verum est, ut tamen verum quoque sit quod angulus contactus sit verus angulus, idemque quantus. Capite quinto idem probat Pelitarius ex prop. 1. Elem. x. Sed angulum omnino non esse, aut nullam habere quantitatem, non probat. Capite sexto respondetur ad argumenta Clavii.—*Ego,* dicit Clavius, *angulos illos ejusdem esse generis negavi hac solum de causa, quod angulus contactus, quantumvis multiplicatus, angulum acutum rectilineum superare nequeat.*—Quod quidem argumentum firmum esset, si modo angulus contactus esset angulo rectilineo homogeneus. Est ergo homogeneus aut nullus. Nullum esse respondet Wallisius. Quorsum igitur dicitur *angulus* contactus, potius quam *punctum* contactus? Sed neque ille nullum esse demonstravit, sed tantum

nullum rectilineum. Quod autem *angulus* contactus angulus sit, et quantus, verum heterogeneus, post demonstrabitur. Rursus Clavius, *ut angulus planus efficiatur, sufficit,* inquit, *duas lineas in plano ad invicem inclinari, non autem requiri ut se mutuo secent.* Quod Wallisius non negat; inclinari negat. Quid autem est inclinatio, si duæ lineæ tunc non inclinantur ad se invicem, cum a diversis regionibus utræque concurrunt ad idem punctum? At *inclinatio,* in definitione anguli, non sumitur, ut in Elemento undecimo, pro angulo rectilineo acuto; ita ut angulus præter acutum nullus sit.

B. Quin arcus et tangens ad se inclinentur, dubitari non debet. Non ergo solvit argumentum Clavii.

A. Atqui hæc sunt præcipue quæ disputantur Capite sexto; ubi neuter ob ignorationem naturæ angulorum veritatem constanter tenet, sed modo hic, modo ille incidit in absurda.

Capite vii probare conatur Wallisius anguli *simpliciter* et anguli *contactus* ὁμογενείαν.—*Primo* inquit, *quæ mutuo possunt vel addi vel auferri, ea non sunt heterogenea.*—Conceditur.—*At angulus contactus, siquidem sit angulus, et recto auferri potest, ut maneat angulus semicirculi internus, et recto adjungi potest, ut fiat angulus semicirculi externus.*—Percepistin' hujus argumenti vim?

B. Ita. Si, inquit, superficiem illam, quæ se ingerit inter tangentem et arcum, auferas, remanebit angulus quem efficiunt diameter et arcus. Quod per se manifestum est, quia aufertur pars a toto.

A. Ergo per Wallisium uterque angulus, tam semicirculi quam contactus, est superficies.

DIALOGUS V.

B. Id quidem, quanquam sit absurdum, manifeste sequitur.

A. Secundo duæ, inquit, *quantitates, quarum altera est major, altera minor, sunt homogeneæ.* Conceditur.—*Sed angulus contactus, siquidem sit angulus, et angulus quivis rectilineus, ejusmodi sunt quantitates;* id est, quarum altera altera potest esse major vel minor. Negatur.

B. Sed probat ex propositione 16 Elem. iii. Euclidis.

A. Nego hoc quoque. Nam per illam propositionem probatur hoc solum, intercedere inter tangentem et arcum superficiem aliquam, non autem angulum aliquem.

B. Tertio, angulus, inquit, *semicirculi ad angulum rectum rectilineum certam habet et determinatam rationem.*

A. Conceditur.

B. Habebit ergo rationem ad reliquum: id est, ad angulum contactus.

A. Negatur. Non est enim angulus contactus pars reliqua anguli recti rectilinei, neque, dempto angulo semicirculi ex angulo recto rectilineo, relinquitur angulus contactus. Verum autem est, dempta superficie intercedente inter diametrum et arcum, quod relinquitur superficies quæ intercedit inter arcum et tangentem; quam superficiem putavit Wallisius esse angulum.

Caput viii testimonium habet Domini Henrici Savilii. Is vero quadratum et circulum homogenea esse ostendit; de angulo contactus, eo loco, ne verbum quidem. Sed paulo inferius de hac re dubitasse eum fatetur ipse Wallisius. Nec si aliter sensisset, ullius apud mathematicos, qui omnia

rationibus, authoritatibus nihil pensitant, momenti esset. Capite ix continetur, primo, argumentum Peletarii deductum ex gratis assumpto lemmate, *angulos semicirculorum*, id est, quos faciunt diametri cum semiperimetris, *esse æquales*. Quod verissimum quidem est, sed omnino idem quod probandum erat. Inde autem demonstrare, quod angulus contactus non habet quantitatem, impossibile est. Sequitur quidem inde angulum contactus nullam partem esse anguli qui continetur a diametro et circumferentia; non autem quod non habet suam sibi quantitatem; nec quod angulus contactus unus altero non possit esse vel major, vel minor, vel æqualis. Ea autem quæ per lemma suum tria enuntiantur, non sunt de angulo contactus, sed de ipso contactu; quasi essent qui ipsum contactum angulum esse dicerent.

B. Sed per contactum intelligi vult contactus angulum.

A. Credo. Sed quod non loquutus sit accurate, in causa erat quod naturam anguli non perspexerit. Verum lemma illud Peletarii Capite x demonstrare frustra conatur Wallisius. Nam etsi verissimum sit, tamen nisi ex definitione anguli simpliciter dicti, sive rectilinei, demonstrari non potest.

B. Quomodo autem lemma illud demonstrabis tu?

A. Quantitas anguli rectilinei, per definitionem meam, est quantitas quam habet arcus interceptus inter duos radios, comparata ad quantitatem totius perimetri. Sed angulus factus inter diametrum et tangentem, nullum intercipit arcum. Est ergo quantitas anguli contactus nulla pars quantitatis an-

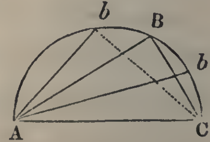
guli rectilinei. Quare arcus semicirculi solus, absque angulo contactus, rectus est.

B. Si angulus contactus nulla pars sit ejus, qui efficitur a tangente et diametro, quare dicitur angulus? Et quomodo dici potest *quantus?*

A. Dicitur angulus, quia formatur a duabus lineis in communi puncto concurrentibus. Quantus dicitur, propterea quod unius anguli contactus quantitas potest esse vel major vel minor quam quantitas alterius.

In quinque paginis quæ faciunt Caput x, ad probandum quod angulus semicirculi est rectus affert sex demonstrationes, quarum ne una quidem satis firma est; ideoque Caput undecimum totum occupat objectio contra Caput x, et ad objectionem responsio. Quod non fuisset necessarium, si fuissent legitimæ demonstrationes ejus. Elige quamlibet et quam putas firmissimam.

B. Eligo quartam, ubi cum angulum constituisset in semicirculo rectum A B C, supponit A B super terminum diametri moveri circulariter ad terminum oppositum. Quanto ergo eo motu minuitur perpetuo angulus ad A, tanto augetur angulus ad C. Itaque angulus in circumferentia perpetuo servatur rectus. Quare et rectus erit, quando A B est in ipso diametro in C. Itaque angulus semicirculi in C erit rectus.



A. Ita quidem, cujus crus alterum semicirculum tangat in C. Sed si crus alterum sit arcus, non est necesse, non inquam necesse est propter vim hujus demonstrationis, nisi et angulus factus ab A B et arcu B C sit etiam rectus; quod, quanquam verum sit, Clavius non concedet.

Capitibus xii et xiii argumenta, quæ adducit, nihil amplius probant quam quod angulus contactus anguli rectilinei non est pars: quod non negatur.

Capite xiv, argumenta explicat desumpta ex optica Vitellionis, (ut ne hujus quidem philosophiæ partis ignarus esse videretur): sed ab illis nihil aliud derivari potest, præterquam quod angulus contactus angulo rectilineo nihil addit. Quod quidem fieri potest, ex eo quod quantitati nihil addit non modo quantitas nulla, sed etiam quantitas heterogenea.

Postremo, capite xv, respondet ad Clavii quædam corollaria. Quorum unum est, quod *potest aliqua quantitas continue et infinite augeri, et tamen augmentum illius quantumcunque minus semper erit decremento hujus:* quod quidem eo sensu quem hoc loco habere debet, dictum est plane absurdum. Alterum, *transiri posse a minore ad majus, vel contra, et per omnia media; nec tamen per æquale:* quod est absurdissimum. Hiccine fuit qui adeo superbe insultaverat Jos. Scaligero, quod dixerat *latera* 12 *dodecagoni majora esse perimetro circuli circumscripti?* Quod quidem absurdum erat, sed non tam quam monstrum hoc Clavii, propter quod geometriam ipsam non magni facerent homines non geometræ. At notat hoc non ut absurdum Wallisius, sed ut falsum.

B. Restat, quoniam angulo contactus quantitatem tribuis, sed anguli rectilinei quantitati heterogeneam, ut ostendas quare sit heterogenea; et qua mensura quantitates duorum angulorum contactus possint mensurari. Primo autem, quid est illud esse *homogeneum?* Et quid est esse *heterogeneum?*

A. Homogeneæ quantitates sunt, quarum men-

suræ applicari possunt una ad alteram, ita ut congruant. Itaque cum linea lineæ applicari possit, et superficies superficiei, et solidum solido applicari concipi potest, erunt quantitates eorum homogeneæ. Item quia quantitas temporis per lineam mensurari potest, et linea lineæ applicari potest, erit quantitas temporis quantitati lineæ homogenea.

B. An tempus et linea congruere inter se possunt?

A. Non. Nec id dixi; sed mensuram lineæ, et mensuram temporis, quæ ambæ sunt lineæ, congruere posse. Etiam motus et ponderis quantitates ad lineas reduci possunt, et proinde eorum quantitates homogeneæ sunt.

B. Quid ergo homogeneum non est? Nam solidum et linea ad numeros reduci possunt; est autem numerus numero homogeneus.

A. Numerus numero, si quæ numerantur sunt homogenea, homogeneus est; alioqui heterogeneus, ut duæ lineæ et duæ superficies. Nisi enim numeri ex unis homogeneis constent, ipsi homogenei non sunt. Numerus enim omnium rerum est communis; et lineæ sunt numerus linearum, quadrata numerus quadratorum, fractio numerus partium. Præterea, angulus rectilineus cum angulo rectilineo congruere potest, cum possint per arcum circuli ambo mensurari; arcus autem cum arcu ejusdem circuli congruere potest. Anguli autem contactus mensura cum anguli rectilinei mensura congruere non potest, quia angulus rectilineus non mensuratur per lineam nisi circularem, et quidem quatenus circularem; mensura autem anguli contactus est linea recta quatenus recta.

B. Quomodo id fieri potest?

A. Circulum non modo circino describi posse nosti, sed etiam continua flexione rectæ. Ut enim recta linea frangi potest in polygonum quotvis laterum æqualium; ita flecti potest, id est, in omni parte frangi, in polygonum laterum numero infinitorum.

B. Scio.

A. Prior generatio lineæ circularis est generatio ab initio, nulla præexistente linea recta; posterior præexistentis rectæ mutatio in curvam circularem.

B. Ita est.

A. Sunt autem curvarum aliæ magis, aliæ minus curvæ. Itaque et curvitati omni sua est certa quantitas.

B. Est.

A. Et curvitati circulari sua certa quantitas.

B. Etiam.

A. Si quæratur autem duorum arcuum æqualium in diversis circulis, uter sit magis curvus, quomodo respondebitur?

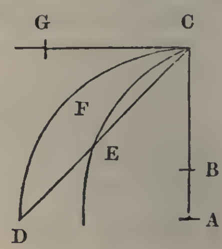
B. Nescio, nisi quod mihi quidem videatur minor circulus esse magis curvus. Nam legi in Galileo quod arcus circuli, si radius esset infinitus, esset linea recta.

A. Ego vero omnium circulorum perimetros, si totas spectes, dico æque esse curvas; item partem perimetri unius, similem parti alterius, esse æque curvam. Nec dissentio a Galileo. Nam si in perimetris diversorum circulorum arcus sumpseris æquales, magis curvus est is qui sumitur in perimetro minore. Id quod voluit Galileus. Verum si sumpseris arcus proportionales, æque curvi sunt; ut quorum curvitates oriuntur a totidem rectæ lineæ fractionibus, in partibus totidem, quæ sunt numero infinitæ, proportionalibus.

DIALOGUS V.

B. Manifesta hæc sunt, sed non mihi videntur satis respicere ad angulum contactus.

A. Dico igitur quantitatem anguli contactus esse quantitatem curvitatis perimetri, quam contingit. Vide figuram hanc, ubi centris A et B descripti sunt duo circuli CD, CE, contigui in C. Ducta autem recta CD secans circulum alterum in E, alterum in D, non modo ostendit quod similes arcus CE, CD



æqualem habent curvitatem, sed etiam quod illa curvitas distributa sit in majori circulo per majorem arcum quam in minori; contra vero, partem CE in minore perimetro magis curvam esse quam pars perimetri majoris, puta CF, ipsi arcui CE æqualis, idque in ratione chordæ majoris CD ad chordam minorem CE, id est, in ratione radii AC ad radium BC.

B. Nihil clarius. Sed quid hæc ad angulum contactus?

A. Ducatur ergo tangens CG, determinabitque illa quanto arcus CE, propter curvitatem suam in arcu minore, magis recedit a tangente quam arcus CD, propter curvitatem eandem in arcu majore.

B. Video reliqua. Recta a puncto contactus, cum secet omnes circulos interiores transeuntes per C proportionaliter, determinabit quantitatem curvitatis arcuum æqualium in unoquoque circulo sumptorum; et proinde earum curvitatum est mensura; quæ mensura cum sit linea recta CED, partes ejus omnes, applicatæ sibi invicem, æquales cum æqualibus congruent. Quare anguli contactus inter se homogenei sunt, habentque quantitatem, et sunt angulis rectilineis heterogenei. Perge modo.

A. Hactenus tractatus *De Angulo Contactus*, quem vides ejusdem esse farinæ cum opere ejus arithmetico integro. DIALOGUS V.

B. Progrediamur ergo ad tractatum *de Sectionibus Conicis*, qui distinguitur in tres partes; quarum prima procemium habet et propositiones viginti: secunda, propositiones viginti et tres: tertia, propositiones sex. In procemio plus promittit quam post præstat. Supponit autem propositio prima, *planum quodlibet conflari ex infinitis parallelogrammis æqualibus, quorum quidem singulorum altitudo sit totius altitudinis pars aliquota infinite parva.* Prætereo, quod si planum parallelogrammum non sit, conflari ex parallelogrammis non potest. Prætereo item, quod planum finitum ex infinitis parallelogrammis conflari non potest. Ille autem hoc voluit conflari planum ex infinitis numero parallelogrammis; idem putans esse infinita parallelogramma, et infinita numero parallelogramma. Id quod notare volo, hoc est, quod supponat partem aliquam aliquotam esse infinite parvam; nam est contradictio in adjecto, non minor quam si quis diceret curvam aliquam lineam esse rectam. Cum enim dicit partem aliquotam, dicit quantitatem in quantitates divisibilem perpetuo divisibiles. Si ergo pars aliquota sit infinite parva, erit illa nihil. Et quia pars aliquota ad totum est ut unum ad numerum, erit quoque, ut nihil ad quantitatem, ita unitas ad numerum. Nonne hoc æque absurdum est, ac illud Clavii, *transiri posse a minore ad majus, nec tamen per æquale?* Et multo magis absurdum quam ulla aut Scaligeri conclusio, aut Orontii?

A. Ita est. Neque recte dicit consentaneum

esse hoc geometriæ indivisibilium Cavallerii, qui per indivisibilia intelligit indivisa.

B. Falsum quoque est quod dicit, planum quodlibet conflari ex infinitis parallelogrammis æqualibus. Neque enim trianguli constant ex parallelogrammis, sed ex trapeziis; neque ullum aliud planum ex parallelogrammis constat, præter parallelogrammum. Neque sequitur ex doctrina Cavallerii, sicut ex doctrina hac Wallisii, *nullam esse cujuscunque plani altitudinem.* Propositio ergo prima nihil egit.

A. Dicit fortasse idem sentire se quod Cavallerius, nempe, esse altitudines suorum parallelogrammorum infinite parvorum non prorsus nullas, sed valde exiguas.

B. Quid ergo opus erat dicere, *infinite parvas*, cum suffecisset dixisse non consideraturum se illorum altitudines ut quantitates? Deinde Propositione secunda, ubi demonstrare vult triangulum totum æquale esse omnibus basi parallelis, supponitque triangulum divisum esse in parallelogramma altitudines habentia infinite parvas; et quia illa parallelogramma sunt arithmetice proportionalia, concludit, et quidem recte, ea simul omnia toti triangulo esse æqualia: animadverto, quod si altitudines nullæ sint, ut is supponit, nulla erit proportio arithmetica, nisi 0, 0, 0, 0, etc., sint arithmetice proportionales. Neque erunt parallelogramma toti triangulo æqualia, nisi infinities nihil possit esse æquale alicui rei; neque si per *infinite parvum* intelligit *exiguum,* necesse erat facere illa exigua. An in ratione arithmetica non fuissent toti non æqualia, si altitudines supposuisset quascunque? Tota ergo hæc propositio unicam habet

demonstrationem, quæ poterat decuplo esse brevior. Itaque quæ sequuntur Propositiones iii, iv, v, et vi, etsi veras habeant conclusiones, vitiosas continent ratiocinationes. Easdem tamen conclusiones nemo non novit, nec recte non potest, et breviter demonstrare. Propositio vii, præter terminorum, quibus utuntur scriptores conici, definitiones, unicam habet demonstrationem, et monita quædam ne non recte intelligeretur, illi qui non satis accurate loquitur plane necessaria. Propositio quam demonstrat, hæc est: *planum coni sectionem efficiens, si unum ex parallelis in cono circulis secet secundum rectam ipsius diametro perpendicularem, etiam reliquos illi parallelos circulos secabit secundum rectas, quæ ipsorum diametris parallelis sunt perpendiculares:* quæ per se perspicua, nec nova est. Hanc ergo propositionem, ut non falsa continentem, quod deberi puto absentiæ symbolorum, dimittamus.

A. Expectabam hic ut demonstraret circulorum omnes in cono perimetros, perimetro basis parallelas, coni totius superficiei esse æquales; ut ante minuta parallelogramma triangulo toti.

B. Et ego. Sed id forte oblitus prætermisit; nam, propter secundam *Arithmeticæ Infinitorum*, non potuit videre falsitatem. At Propositione iv, eadem illa methodo ostendit semiparabolæ planum ex infinitis constare lateribus quadratorum, arithmetice proportionalium; et recte quidem, modo latus quadrati concedamus esse parallelogrammum.

A. Sed illud falsum est.

B. Scis autem ex falsis verum, etsi non contra ex veris falsum, concludi posse. Idem eodem modo Propositio ix probat de conoide parabolico, quod

DIALOGUS V.

constat ex infinito numero planorum arithmetice proportionalium. Quod concedimus ut verum, sed non ut novum, nec hic demonstratum, nisi illa plana sint cylindrusi. Quod tu iterum dices esse falsum.

A. Quidni?

B. Propositio decima est, quod *pyramidoidis parabolici et plani per axem secantis communis sectio est parabola.* Quod est falsum, nisi addat quod sectio transire debeat per angulos oppositos. Cum enim conoidis parabolici planique per axem communis sectio sit parabola, impossibile est ut idem contingat in pyramidoide, aut ulla alia figura basem habente rectilineam, nempe, polygonum.

A. Propositio xi figuram exhibet aliam novam, quam appellat cuneum parabolicum: qui nihil aliud est, ut mihi videtur, quam simpliciter cuneus, nimirum, prisma cujus basis est parallelogrammum, acies autem linea recta. Quod quidem prisma est aggregatum triangulorum, quorum quidem bases simul omnes faciunt parallelogrammum, vertices autem lineam rectam. Quæ est figura tecti domus.

B. Temere hæc.

A. Sequuntur rursus inventa aliena. Itaque Propositio xii ostendit quid sit *latus rectum*, sive *parameter*, sive *juxta quam possunt* ordinatim applicatæ.—*Parameter hæc non uspiam,* inquit, *vel in coni sectione vel in ipso cono realiter existit, sed sola imaginatione suppletur.*—Quod est falsum, natumque ex imperitia hominis in conicis semidocti.

B. Quænam autem est recta illa in coni sectione realiter existens parameter?

A. Dicam. Describe parabolam, (non nunc, sed cum fueris apud te), et comprehende parallelo-

grammo, cujus unum latus tanget parabolam in vertice et faciet angulum cum diametro. Angulum illum ducta recta secans lineam parabolicam alicubi, dividat bifariam, et compleatur parallelogrammum, cujus unus angulus est in vertice, alter est in linea parabolica. Erit autem parallelogrammum illud vel quadratum vel rhombus. Hujus latus est parameter. Meditare, inquam, hoc tecum, et judica an parameter magis sit imaginaria quam diameter, vel alia quævis linea. Est autem ubique ut intercepta diameter ad illam, ita illa ad ordinatim applicatam. Id quod Wallisius enuntiat per *quantuplo major est vel minor, etc., tantuplo, etc.:* quæ voces *quantuplum* et *tantuplum* neque Latinæ sunt, neque quicquam significant.

B. Miror certe alienæ Latinitatis reprehensorem tam acrem, toties barbare scribentem non sensisse.

A. Fieri potest ut linguæ Latinæ usum aliqua ex parte labefactaverit studium nimium linguæ Arabicæ.

B. Non puto.

A. Proximo loco, quamlibet parabolam cuilibet cono aptari posse, (puto nam* obscure), demonstrat; neque enim nova res est, neque difficilis. Propositiones decem hujus partis primæ reliquæ, ubi de ellipticis et hyperbolicis pyramidoidibus et cuneis, et de ellipsium et hyperbolarum parametris *imaginariis* loquitur, eodem laborant vitio. Vides ergo sectiones conicas, quatenus in ipso cono consideratas, quam parum intelligit. Quod attinet ad considerationem earundem sectionum extra conum, ea scribit quæ, quia non intelligi, reprehendi non

---

* Edit. 1660 et 1668, *nam.* Quære, *non?*

possunt. Nam theoremata, excepto quadragesimo septimo, quod suum est et falsum, ab aliis vere demonstrata sunt; Wallisii autem demonstrationes, propter densitatem symbolorum, non apparent. Neque quicquam habent, etsi veræ essent, præter analysin alienæ syntheseos. Ea igitur transilio, properans ad tractatum *de Arithmetica Infinitorum*, quo nihil unquam quisquam vidit in geometria turpius.

B. Incipiamus ergo ab Epistola Dedicatoria.

A. Non est necesse. Nihil enim continet præter ordinem suarum ipsius cogitationum, quibus perductus est ad absurdam illam ejus circuli quadraturam. Neque in tractatu ipso ulterius legam quam ad propositionem xli: quia priores has pro fundamento ponit omnium quæ sequuntur. Prima propositio est *lemma*, vel potius *problema* hoc: *Si proponatur series quantitatum arithmetice proportionalium, sive juxta naturalem numerorum consequutionem continue crescentium, a puncto vel* 0 *(cyphra seu nihilo) inchoatarum, puta* 0, 1, 2, 3, 4, *etc.; propositum sit inquirere quam habet rationem earum omnium aggregatum ad aggregatum totidem maximæ æqualium.*

B. Rationem habet tota series ad numerum terminorum multiplicatum per maximum, eandem quam habet semissis ad integrum. Summa enim terminorum omnium, ut in hac serie 0, 1, 2, 3, 4, æqualis est producto ex numero terminorum ducto in semissem maximæ. Itaque cum termini hic sint quinque, et maximæ semissis 2, erit productus ex 2 in 5 æqualis 10. Est autem 10 summa terminorum omnium. Idem contingeret in alia quavis progressione arithmetica incipiente a cyphra, ut

0, 3, 6, 9; ubi summa maximæ et minimæ, id est 9, ducta in semissem numeri terminorum, 2, facit 18, semissem ducti 9 in numerum terminorum 4. Geometrice etiam probari potest, eodem argumento quo triangulum ostenditur parallelogrammi sui esse dimidium.

A. Notissimum est. Sed non hic de veritate quæritur conclusionis, sed demonstrationis. Nam per inductionem probat. Inductio autem demonstratio non est, nisi ubi particularia omnia enumerantur, quod hic est impossibile. Itaque cum post exposita aliquot particularia subjungit:—*Et pari modo quantumlibet progediamur, prodibit semper ratio subdupla*:—libenter velim scire, unde id scit, nisi causam proferat aut sciat quare necessario ita est. Secunda propositio eadem est cum prima, (et propterea falsa, ut alio tempore ostendetur), nisi quod addit idem contingere, etsi numerus terminorum sit infinitus.

B. Id certe falsum est. Siquidem enim numerorum termini numero infiniti essent, etiam terminus maximus solus per se infinitus esset, et summa terminorum numero infinitorum semissis esset infinitæ summæ infinities multiplicatæ.

A. Non ille primus se induit absurdis quæ circumstant contemplantes infinitatem. Propositio tertia hæc est: *Triangulum ad parallelogrammum, super æquali basi æque altum, est ut* 1 *ad* 2. Imo vero, non *ergo*, sed propter causas ab Euclide dictas (Elem. 1. prop. 41). Idem dicendum est ad propositionem quartam de conoide parabolico, propter causas ab aliis exhibitas. Propositione quinta, eadem methodo probare vult lineam spiralem esse

DIALOGUS V.

ad arcum circuli sibi respondentem, ut 1 ad 2. Quod est falsum.

B. Etiam confitente Wallisio, qui in scholio ad propositionem xiii, per spiralem intelligere se dicit arcuum omnium infinite parvorum aggregatum.

A. Sed in propositione hac loquitur manifeste de spirali descripta ab Archimede. Propositiones ergo vi, vii, viii, ix, x, xi, xii, xiii, sunt falsæ, ut quæ ab hac dependent. Præterea, quam absurdum est lineam, constantem ex infinitis numero arcubus infinite parvis, appellare spiralem! Quæ si regulariter sive regulari motu generetur, necessario erit arcus circuli. Itaque etiam propositiones xiv, xv, xvi, xvii, xviii, quæ fundantur super hanc ejus spiralis interpretationem, sunt omnes falsæ. Neque ductæ a centro ad æquales illos exiguos arcus, erunt arithmetice proportionales. Comparata hæc ad sequentia leviuscula sunt.

B. An pejus in geometria esse potest, quam facere spiralem constare ex arcubus circuli, iisdemque a rectis e centro interceptis arithmetice proportionalibus, quique etiam æquales efficiunt angulos?

A. Satis quidem absurda illa sunt. Sed videamus et hæc, propositionis xix lemma.—*Si proponatur series quantitatum in duplicata ratione arithmetice proportionalium, sive juxta seriem numerorum quadraticorum continue crescentium, a puncto vel* 0 *inchoatarum, ut* 0, 1, 4, 9, 16, *etc: propositum sit inquirere quam habeat illa rationem ad seriem totidem maximæ æqualium. Fiat investigatio per modum inductionis, ut in propositione prima. Eritque*

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$$

Et sic deinceps. Ratio proveniens est ubique major quam subtripla, seu $\frac{1}{3}$. *Excessus autem perpetuo decrescit, prout numerus terminorum augetur; puta* $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{36}$, *etc.; aucto nimirum fractionis denominatore, sive consequente rationis, in singulis locis numero senario, (ut patet); ut sit rationis provenientis excessus supra subtriplum, ea quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post* 0: *adeoque.*

B. Permitte mihi eadem una tecum inspicere.

A. Illud $\frac{0+1}{1+1}$, quid sunt? Fractiones an rationes?

B. Utrum vis. Nosti enim huic scriptori eandem esse rem, rationem et fractionem.

A. Est ergo $\frac{0}{1}$ fractio, et $\frac{1}{1}$ fractio, et $\frac{0+1}{1+1}$ summa earum, eademque æqualis $\frac{1}{2}$.

B. Ita.

A. Sed fractio $\frac{0}{1}$ est nihil; ergo sola fractio $\frac{1}{1}$ per se æqualis est fractioni $\frac{1}{2}$. Satin' hoc absurdum?

B. Ita est; sed non magis quam doctrina ejus de spirali. At fortassis $\frac{0+1}{1+1}$ unica est fractio, et proinde æqualis $\frac{1}{2}$; et illa æqualis $\frac{3}{6}$, et hæc æqualis $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. Quid hic absurdi est?

A. Nonne vides, dum copulatas quantitates pro fractione una habes, facere te $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, id est $\frac{2}{9}$, æqualem $\frac{1}{2}$?

B. Video. Sed etsi ponat $\frac{0+1}{1+1}$ pro unica fractione, ponit fortasse $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ pro duabus.

A. Esto. Quomodo ergo unica ratio 3 ad 6

DIALOGUS V.

æqualis est duabus rationibus 1 ad 3 et 1 ad 6, quod ille dicit; cum rationem 3 ad 6 superare dicat rationem 1 ad 3 ratione 1 ad 6?

B. Nonne recte?

A. Minime. Quoniam enim $\frac{3}{6}$ est ratio 3 ad 6, eademque æqualis duabus simul rationibus 1 ad 3 et 1 ad 6; si componantur ratione* 1 ad 3 et 1 ad 6, erit ratio proveniens (per illum) ratio 3 ad 6.

B. Recte.

A. Componuntur autem rationes quando rationum quantitates, id est, tam antecedentes quam consequentes ipsarum, inter se multiplicantur. Rationes ergo 1 ad 3 et 1 ad 6 compositæ, faciunt rationem 1 ad 18. Vel sic, fiat ut 1 ad 6, ita 3 ad aliam, et oritur 18. Et proinde, expositis his numeris 1, 6, 18, priores duo habent rationem 1 ad 6, et posteriores rationem 6 ad 18, sive 1 ad 3. Quare ratio $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ æqualis est rationi 1 ad 18. Est ergo, per Wallisium, eadem ratio 3 ad 6 quæ 1 ad 18.

B. Monstri simile est.

A. Similiter, rationem 5 ad 12 æqualem facit rationibus 1 ad 3 et 1 ad 12, simul sumptis; quæ duæ rationes compositæ faciunt rationem 1 ad 36: itaque 5 ad 12 eandem habet rationem, quam 1 ad 36.

B. Itaque quicquid ex hac operatione inferetur, pro indemonstrato habendum est.

A. Inferetur autem primo, propositio sequens, nempe vicesima.—*Si proponatur series quantitatum in duplicata ratione arithmetice proportionalium, sive juxta seriem numerorum quadra-*

---

* Sic Edit. 1660 et 1668. Quære "rationes."

ticorum continue crescentium, a puncto vel 0 *inchoatarum; ratio quam habet illa ad seriem totidem maximæ æqualium, subtriplam superabit; eritque excessus ea ratio, quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post* 0; *sive, quam habet radix quadratica termini primi post* 0, *ad sextuplum radicis quadraticæ termini maximi.*—Clare hic loquutus est. DIALOGUS V.

B. Intelligo. Rationem, quam habet series crescentium ad seriem totidem maximæ æqualium, majorem esse dicit quam ratio 1 ad 3, tanto quanto est ratio unitatis ad sextuplum numeri terminorum post 0, hoc est, in serie $\frac{0+1+4}{4+4+4}$, $(=\frac{5}{12})$, rationem 5 ad 12 majorem esse ratione 1 ad 3 sive 4 ad 12, tanto quanta est ratio 1 ad 12.

A. Recte intelligis. Est autem falsum. Nam ratio 5 ad 12 æqualis esset ambabus simul rationibus 1 ad 3 et 1 ad 12: quæ rationes compositæ, juxta definitionem Elem. vi. 5, faciunt rationem 1 ad 36. Est ergo ratio 5 ad 12 æqualis rationi 1 ad 36. Vel si inter 5 et 12 interponamus 4, ut sint tres quantitates 5, 4, 12, ratio primæ 5 ad tertiam 12 major erit ratione 4 ad 12, id est, ratione subtripla, tanto quanta est ratio 5 ad 4. Itaque, per bonum vestrum professorem, eadem est ratio 5 ad 4 et 1 ad 12.

B. Error manifestus est, et quidem major illo, quem erravit in doctrina spiralium. Quod non facile credidissem.

A. Vide jam id quod inde infert, nempe, si series hæc quadratica esset infinita, summa crescentium ad summam totidem maximarum, esset accurate in ratione 1 ad 3. Sic enim probat.—*Cum autem, crescente numero terminorum, excessus ille supra*

DIALOGUS V.

rationem subtriplam ita continuo minuatur, ut tandem quovis assignabili minor evadat, ut patet: si in infinitum procedatur, prorsus evaniturus est. Adeoque, si (quæ est propositio xxi) *proponatur series infinita quantitatum in duplicata ratione arithmetice proportionalium, sive juxta seriem numerorum quadraticorum, continue crescentium, a puncto sive* 0 *inchoatarum; erit illa ad seriem totidem maximæ æqualium, ut* 1 *ad* 3.

B. Videtur sane excessum rationis, si perpetuo minuatur, debere tandem evanescere; saltem tam exiguum esse, ut nullius deberet esse considerationis. Itaque pereunte excessu rationis supra subtriplam, relinquetur præcise subtripla.

A. Ita certe, nisi una crescerent quantitates comparatæ. Vide seriem primam $\frac{0+1}{1+1}$. Nonne majorem rationem habet $0+1$ ad $1+1$, quam 1 ad 3, id est, quam ratio subtripla?

B. Ita quidem, sed ut, addita ad consequentem unitate, esset subtripla.

A. Deinde, vide seriem secundam $\frac{0+1+4}{4+4+4}$. Nonne ratio seriei crescentis 5 ad seriem maximarum 12, major est quam subtripla?

B. Etiam. Ita vero ut, addito ad consequentem numero 3, fiat subtripla.

A. Manifestum ergo est, si procedatur in infinitum, numerus crescentium major erit numero subtriplo maximarum; eritque excessus numerus major quam ut possit dici. Tantum abest ut series crescentium, quantumvis procedendo, possit esse subtripla seriei maximarum.

B. Error est manifestissimus.

A. Ex propositione hac dependent non modo omnes sequentes usque ad 39, sed etiam omnes

illæ quibus rationem determinat parabolarum et paraboloideum ad circumscripta parallelogramma.

B. Sed rationes, quas assignavit, veræ sunt, et a mathematicis receptæ.

A. Vere quidem, et jamdiu circumlatæ sunt, sed sine demonstratione.

B. Demonstratæ extant ab Hobbio, cap. vii libri DE CORPORE, editione Latina.

A. Propositio xxxix: *Si proponatur series quantitatum in triplicata ratione arithmetice proportionalium, sive juxta seriem numerorum cubicorum, continue crescentium, a puncto vel* 0 *inchoatarum, puta ut* 0, 1, 8, 27, 64, *etc., propositum sit inquirere quam habeat illa rationem ad seriem totidem maximæ æqualium. Fiat investigatio per modum inductionis, ut in* prop. i *et* xix. *Eritque*

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{0+1+8=9}{8+8+8=24}=\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{0+1+8+27=36}{27+27+27+27=108}=\frac{4}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

Et sic deinceps. Ratio proveniens est ubique major quam subquadrupla, seu $\frac{1}{4}$. *Excessus autem perpetuo decrescit, prout numerus terminorum augetur, puta* $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{20}, \frac{1}{24}$, *etc.; aucto nimirum fractionis denominatore, sive consequente rationis, in singulis locis, numero quaternario, (ut patet), ut sit rationis provenientis excessus supra subquadruplum, ea quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum post* 0. *Adeoque.*

B. Eadem est methodus quæ in propositione xix. An et iidem errores?

A. Plane iidem. Nam si $\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ rationes sint, impossibile est ut ratio 2 ad 4 sit æqualis duabus

rationibus 1 ad 4 et 1 ad 4. Nam ratio 2 ad 4 duplicata esset rationis 1 ad 4. Sed ratio 1 ad 16 duplicata est rationis 1 ad 4. Esset ergo ut 2 ad 4, ita 1 ad 16. Conclusio autem, quam deducit ex hac propositione xxxix, est propositio xl, nempe hæc: *Si proponatur series quantitatum in triplicata ratione arithmetice proportionalium, sive juxta seriem numerorum cubicorum continue crescentium, a puncto vel 0 inchoatarum; ratio, quam habet illa ad seriem totidem maximæ æqualium, subquadruplum superabit; eritque excessus ea ratio, quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum post 0; sive, quam habet radix cubica termini primi post 0, ad quadruplum radicis cubicæ termini maximi.*

B. Erit, inquit, excessus rationis quam habet series crescentium ad totidem maximas, supra rationem subquadruplam, ea ratio quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum post 0. Id est, in hac serie $\frac{0+1+8}{8+8+8}$, ratio 9 ad 24 superabit rationem subquadruplam, et excessus erit ratio 1 ad 8.

A. Nonne ergo ratio 1 ad 8, composita cum ratione subquadrupla, faciet rationem 9 ad 24?

B. Certissime.

A. Sed ratio 1 ad 8, et ratio 6 ad 24, id est, subquadrupla, faciunt rationem 6 ad 192. Est ergo ut 9 ad 24 ita 6 ad 192. Vel si ponantur ordine hi numeri 9, 6, 24, ratio 6 ad 24 est subquadrupla. Superat autem ratio 9 ad 24 rationem 6 ad 24 subquadruplam, ratione 9 ad 6. Est ergo ut 9 ad 6 ita 1 ad 8. Siccine solent γεωμετρεῖν professores publici?

B. Eundem errat errorem, nunc et ante.

A. Deinde quod infert: *Cum autem, crescente*

numero terminorum, excessus ille supra rationem subquadruplam ita continuo minuatur, ut tandem quolibet assignabili minor evadat, (ut patet); si in infinitum procedatur, prorsus evaniturus est. Adeoque (quæ est propositio xli) *si proponatur series infinita quantitatum in triplicata ratione arithmetice proportionalium, sive juxta seriem numerorum cubicorum continue crescentium, a puncto seu* 0 *inchoatarum; erit ille ad seriem totidem maximæ æqualium, ut* 1 *ad* 4: falsum est. Est enim in prima serie $\frac{0+1}{1+1}$, summa crescentium, major quam subquadrupla totidem maximarum, tanto quanta est semissis unitatis. In serie secunda, summa crescentium superat subquadruplam maximarum tribus unitatibus. In tertia, novem unitatibus; etc. Quousque procedendum esse putas, ut summa crescentium sit tandem maximarum subquadrupla?

DIALOGUS V.

B. Quanto plus proceditur tanto pejus. Propositio est falsa.

A. Deinde propositione xliii: *Pari,* inquit, *methodo invenietur ratio seriei infinitæ quantitatum in ratione quadruplicata, quintuplicata, sextuplicata, etc., arithmetice proportionalium, a puncto seu* 0 *inchoatarum, ad seriem totidem maximæ æqualium; nempe in quadruplicata* 1 *ad* 5, *etc.*

B. Falsum est; ne examines.

A. Imo vero, quid afferant novi quæ sequuntur, ulterius ne quæramus; cum ab his dependeant cætera omnia.

B. Ne imaginari quidem possum quicquam, quod aut Wallisius aut eorum ullus qui libros ejus literis ad ipsum scriptis laudaverunt, contra hæc tam perspicue demonstrata afferre possunt.

DIALOGUS V.

A. Extantne geometrarum literæ, quibus geometria hæc Wallisii comprobatur?

B. Extant quidem, editæ ab Wallisio; altera Hugenii, altera nescio cujus, sed dicunt aliqui esse Schootenii, vix Latina. Præterea Robervallus, professor Parisiis celeberrimus, idemque alias in demonstrationibus propriis satis cautus, chartulæ cujusdam manuscriptæ exemplaria aliquot in Angliam transmisit, in qua doctrinam de comparatione parabolarum et conoideum ex illis factarum ad parallelogramma et cylindros circumscriptos, in hoc tractatu *De Arithmetica Infinitorum* expositam, negat ab Wallisio primo, sed a se inventam esse asserit. Quod non fecisset nisi doctrinam ipsam veram esse censuisset.

A. Mirandum non est si illi, qui maximam operam in eo posuerunt ut rationem arcus ad radium ad numeros reducerent, methodum hanc symbolicam incaute amplexi sint. Sed ut Robervallus, qui geometrarum primus esse vult et fere est, paralogismos tam crassos videre non potuerit, profecto mirandum est.

B. Habet hoc peculiare Robervallus: cum egregium quis a se inventum theorema in publicum emiserit, ut statim distributis chartulis dicat idem a se inventum esse prius. Itaque theorema de solido hyperbolico, inventum a Toricellio, postquam esset editum ad se rapuit; et nunc methodum de comparatione paraboloideum, editam a Wallisio et solo Wallisio dignam, suam haberi incautus petit. Idem Hobbium, qui æqualitatem inter spiralem et parabolicam primus vidit, quia ipse eandem prius demonstraverat appellat plagiarium.

B. Et merito: siquidem Robervalli demonstrationem ediderat ut suam.

A. Sed demonstrationem Robervalli negat se vidisse; sed cum convenissent Parisiis in cœnobio Minimorum, ipse, Mersennus, Robervallus, et quartus quem non nominat, incidissetque sermo de comparatione spiralis et parabolicæ, "videtur", inquit Hobbius, "linea spiralis æqualis esse rectæ quæ subtendit semiparabolam; cujus quidem axis sit æqualis semiperimetro circuli spiralem continentis, basis autem ejusdem circuli radio." Itaque creta designans figuram in pariete, sic arguebat: "Quoniam in axe parabolæ, motus, quo parabola generatur, augetur juxta rationem temporum duplicatam, motus autem in base est uniformis; item, quia motus, quo generatur spiralis in circulo, augetur in ratione temporum duplicata, et in radio est uniformis: videtur similis esse generatio unius generationi alterius; et proinde, si vertex semiparabolæ cum termino basis connecteretur per lineam rectam, rectam illam, ut quæ eandem habet generationem, æqualem esse oportere spirali." Quæ illatio vera non erat, sed contra conclusionem quam probare conatus est. Id cum animadvertisset Robervallus, "recta", inquit, "semiparabolam subtendens, fit a motu utroque uniformi." Itaque abjecta creta errorem agnovit Hobbius. At Robervallus postridie eandem propositionem ad Mersennum demonstratam attulit. Quam tamen demonstrationem non vidit Hobbius, sed postea theorema idem sua methodo demonstravit, ediditque.

A. Si ita est, inventionem illam Hobbio potius quam Robervallo adjudicarem, et hunc quam illum

DIALOGUS V.

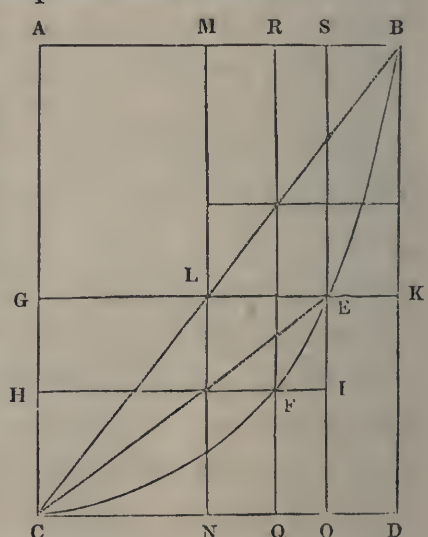
dicerem plagiarium. Sed quo teste rem ita esse probaverit, si opus sit?

B. Quæsivit Hobbius per epistolam a quarto illo, quem non nominavit, utrum chartula illa ipsius esset Robervalli, necne. Is autem nescire se rescripsit, cujus esset; sed paratum se testem esse, lucem et methodum demonstrationis suæ accepisse ab Hobbio Robervallum. Sic enim scribit Gallice: "Je n'ay pas veu sa demonstration, mais quoyqu'il fasse, il ne peut desnier que vous ne soyez cause qu'il ait trouvé cette proposition, puisque vous luy avez donné l'idée, et le sujet de la trouver. C'est ce que je tesmoigneray tousjours."

B. Quoniam parabolæ et paraboloideum cum parallelogrammis, et conoideum cum cylindris comparationem, neque methodo hac Wallisiana, neque ab ullo alio (quanquam vulgo receptam) demonstrationibus editis demonstratam esse dicis, age, si quam habes ejus rei demonstrationem, profer illam.

A. Proferam, puto, eamque universalem.

Describatur parallelogrammum ABCD; intelligaturque basis AB moveri parallela ad CD, ita ut, dum movetur, perpetuo decrescat donec evanescat in puncto C; sitque ratio diminutæ AB ad ipsam AB integram ubique eadem quæ ratio AC ad AG, vel ubique duplicata, vel triplicata, vel in alia quacunque ratione rationis ad rationem. Dum AB eo modo decrescit, punctum



B describat lineam aliquam, puta BEFC. Dico jam, si ratio AC ad AG sit eadem quæ ratio AB ad GE, spatium ABEFC esse ad spatium DCFEB ut 1 ad 1; si vero ratio AC ad AG sit duplicata rationis AB ad GE, spatium DBEFC esse ad spatium ACFEB ut 1 ad 2; si triplicata, ut 1 ad 3; et sic deinceps. Intellextin'?

B. Intelligo, et siquidem ita esse demonstraveris, video esse facillimum paraboloidis cujuscunque ad suum parallelogrammum, et conoidis cujuscunque ad suum cylindrum rationem exhibere in numeris.

A. Assumo autem primo, *quod qua ratione mobilis velocitas augetur, eadem ratione augeri* quoque spatia ab ea iisdem vel æqualibus temporibus percursa.* Secundo, *quod si inter duas rectas interponantur mediæ tum arithmeticæ tum geometricæ numero infinitæ, hæ et illæ magnitudine non different; saltem differentiæ earum minores erunt qualibet quantitate finita.*

B. Utrumque manifestum est; et potest demonstrari. Nam incipiendo a maxima extremarum, major est media arithmetica quam geometrica. Quanto autem minus inter se extremæ differunt, tanto differentia inter mediam arithmeticam et geometricam minor est. Itaque si mediæ tum arithmeticæ tum geometricæ ubique interponantur, minus inter se different omni quantitate effabili.

A. Recte. Itaque in parallelogrammo ABCD concipiatur latus AB moveri ad latus CD parallelῶs, et movendo decrescere donec tandem evanescat in puncto C; et per talem motum descripta sit figura ABEFC, relicto complemento DCFEB, cujus

* Sic Edit. 1668.

DIALOGUS V.

linea BEFC describitur a termino B decrescentis AB. Eodem autem tempore moveri intelligatur latus AC ad latus AB* uniformiter; potest igitur haberi CD pro mensura temporis; rectæ autem ipsi CD parallelæ, terminatæ ab una parte in linea BEFC, in altera parte in recta AC, erunt mensuræ partium temporis in quo AB movetur ad CD, et AC ad BD*. Sumatur jam in recta CD ad placitum punctum O, ducatur OS parallela lateri BD secans lineam BEFC in E, et rectam AB in S. Et rursus, a puncto Q, sumpto in CD arbitrarie, ducatur eidem lateri BD parallela QR secans BEFC in F, et AB in R. Ducantur etiam EG, FH parallelæ CD, secantes AC in G et H. Postremo idem supponatur fieri per omnia puncta lineæ BEFC. Habes constructionem.

B. Habeo et teneo.

A. Dico jam esse, ut aggregatum omnium velocitatum, quibus describuntur rectæ QF, OE, DB, cæteræque omnes eadem methodo genitæ, ad aggregatum rationum temporum designatorum per rectas HF, GE, AB, et cæteras, ita planum DCFEB ad planum ABEFC. Sicut enim AB decrescendo per lineam BEFC in tempore CD, evanescit in punctum C, ita CD*, ipsi AB æqualis, decrescendo per eandem lineam CFEB, eodem tempore evanescit in punctum B, descripta recta DB æquali AC. Sunt ergo velocitates, quibus describuntur AC et DB, inter se æquales. Rursus, quoniam eodem tempore quo punctum O describit rectam OE, eodem tempore punctum S describit rectam SE, erit OE ad SE, ut velocitas qua describitur OE ad velocitatem qua describitur SE. Et propter eandem causam,

* Sic Edit. 1668.

QF erit ad RF, ut velocitas qua describitur QF ad velocitatem qua describitur RF; et sic de cæteris omnibus rectis rectæ DB parallelis. Ut ergo rectæ, quæ sunt parallelæ lateri AB, terminanturque in linea BEFC, sunt mensuræ temporum; ita rectæ, quæ sunt parallelæ lateri BD, terminatæque in eadem linea BEFC, sunt mensuræ velocitatum. Nam concessum est, in qua ratione augentur velocitates, in eadem augeri rectas eodem tempore percursas, id est, rectas QF, OE, BD, etc.

B. Verum est.

A. Jam lineæ illæ omnes QF, OE, DB, etc., constituunt planum DBEFC, et lineæ omnes HF, GE, AB, etc., constituunt planum ACFEB: quarum illæ sunt aggregatum velocitatum, hæ aggregatum temporum. Ut igitur aggregatum velocitatum ad aggregatum temporum, ita complementum DBEFC ad figuram ABEFC. Siquidem ergo rationes DB ad OE et OE ad QF fuerint ubique rationum AB ad GE et GE ad HF (exempli causa) triplicatæ, erunt vice versa rationes OE ad DB et QF ad OE, rationum GE ad AB et HF ad GE subtriplicatæ. Quare aggregatum omnium QF, OE, BD, etc., aggregati omnium HF, GE, AB, etc., erit (per assumptum secundum) subtriplum. Ut ergo aggregatum velocitatum ad aggregatum temporum, quibus describuntur figura deficiens et complementum, ita erit ipsum complementum ad figuram ipsam, nimirum, complementum DBEFC ad figuram ABEFC: quod erat demonstrandum.

B. Sequitur hinc, quod cum in triangulis basis decrescit in ratione temporum, parallelogrammum erit sui trianguli duplum; cumque basis semiparabolæ decrescat in ratione temporum duplicata, erit

DIALOGUS V.

parallelogrammum suæ parabolæ sesquialterum, ut et cylindrus sui conoidis parabolici duplum. Cum item basis paraboloidis cubici sive parabolastri primi, decrescat in ratione temporum triplicata, erit parallelogrammum sui parabolastri primi sesquitertium ; et cylindrus sui coni triplum ; et parallelopipedum sui pyramidis triplum. Et sic de cæteris figuris, prout postulant rationes juxta quas generantur.

Itaque theorema hoc universale, nempe : *in omni figura generata per motum quanti decrescentis donec evanescat in punctum, secundum quamlibet rationem constantem ab initio motus ad finem, rationem figuræ factæ ad complementum ejus, id est, ad id quo figura facta superatur ab ea figura quæ facta esset, si quantum generans mansisset integrum, eam esse quam habet ratio reliqui ad reliquum ad rationem ablati ad ablatum ;* ideoque ubi reliquum ad reliquum est in ratione ablati ad ablatum duplicata vel triplicata etc., ibi figuram factam ad complementum esse duplum, triplum, etc., respective : theorema, inquam, hoc habet claritudinem per se tantam fere, ut possit haberi pro axiomate, atque ob hanc fortasse causam veritatem a tot geometris agnitam fuisse*, etsi a nemine hactenus demonstratam.

A. Itaque Wallisius, qui nil tam difficile esse arbitratus est quin per artem analyticam inveniri et solvi posset, artemque analyticam nihil aliud esse quam vocabulorum et orationis loco notis quibusdam novis, quæ vocant symbola, ratiocinationis suæ vestigia pingere, theoremata hæc aliaque difficiliora, quæ ut certa jamdudum circumferebantur, nova a

* Sic Edit. 1668.

DIALOGUS V.

se methodo demonstrata esse opinatus est. Ut quia videbat cum omnibus, in progressione numerorum a cyphra sive 0, summam numerorum progredientium dimidiam esse summæ numeri maximi toties sumpti quot sunt termini progressionis, idem accidere etiam affirmavit ubi lineæ latitudinis infinitæ* exiguæ, crescentes a puncto, secundum progressionem eandem, constituent superficiem qualemcunque. Quod, nescientibus illius encomiastis et nonnullis præterea geometriæ professoribus, falsum, neque nisi de triangulis rectilineis universaliter, pronunciandum est.

Vidisti jam tractatus Wallisii, tum geometricos tum arithmeticos, nullius esse pretii, ut qui nullam continent veri theorematis demonstrationem novam; sed vel aliorum demonstrationes symbolice, id est obscure, transcriptas; vel suas ipsius falsas; vel etiam aliquando, præsertim in Tractatu *de Arithmetica Infinitorum,* theoremata ipsa falsa. Judica ergo, ipse Wallisius et doctrinæ Wallisianæ comprobatores et encomiastæ, quales sunt mathematici. Legisti etiam *Elenchum* ejus, et vidisti quam sit refertus convitiis rusticanis. Judica ergo quam necessaria conditio sit ad theologiæ doctoratum, ut quis sit vir bonus. Convitiorum causa fuit ira. Sed quæ causa iræ? Nempe, homines ambitiosi cupidique regnandi, non modo in foro externo, sed etiam in interno, ad omne dictum vel scriptum quod cupiditati eorum adversatur, illico excandescunt; et siquidem audent, maledictis onerant. Causa autem ignorantiæ est, partim quod scientias non ipsarum amore, sed lucri causa adeunt, ut stipendia mereantur; maxime vero quod scientiam

* Sic Edit. 1688. Quære, "infinite."

non in rerum ipsarum imaginibus, sed in verbis magistrorum quærunt, iisque non semper intellectis. Itaque principia ignorantes, id est naturam puncti, lineæ, anguli, rationis nescientes, in absurda quæ recensuimus delapsi sunt.

B. Sic puto.

A. Accessit quoque scientiis damnosa illa multitudo symbolorum, quorum fiducia attentionem ad rerum ipsarum ideas remiserunt, quæ, inventa ad leniendum nobilium adolescentulorum in quærendis problematum arithmeticorum solutionibus molestiam, adeo visa est res elegans, ut nihil esse neque in arithmetica neque in geometria tam difficile videretur, quod ope symbolorum solvi non posset. Itaque omnes laudare et magnifacere scientiam quandam, quam nominarunt *symbolicam;* etiam homines, quibus nihil videbatur ad eminentiam deesse præterquam ut docti essent in mathematicis, magistris usi sunt symbolicis, frustra. Verum, sicut sine suspicione criminis nemo fit inexpectato et repentine dives, ita nemo ullo modo sine magno studio et labore fiet doctus.

B. Parumne prodest ad solutionem problematum mathematicorum ars analytica, et ad analyticam usus symbolorum ?

A. Imo multum. Sed quid hoc ad nuper introducta symbola ? Literæ A, B, C, etc., quibus solis usi sunt geometræ veteres, nonne sunt symbola ? Plura autem sæpius ἐνοχλοῦσιν quam adjuvant. Quod autem analysin attinet, non minus apparet in scriptis Euclidis, Archimedis, Apollonii, aliorumque antiquorum, quam Vietæ, Ougtredi, et cæterorum algebristarum. Quid enim est analytica hæc recentium ?

B. Est ars qua, a quæsiti suppositione, pervenitur per consequentias ad vera, naturæ ordine priora: et synthetica, qua reciproce, a veris prioribus venitur ad quæsiti conclusionem.

A. Euclides ergo et cæteri antiqui ea perpetuo usi sunt. Quid enim, cum apud illos theorema legis quod incipit a *Si*, nonne vox illa *Si* denotat aliquid esse suppositum? Exempli gratia; æqualitatem angulorum, unde per consequentias venitur ad aliquod prius, quæ est æqualitas laterum. Hæc autem est analysis. Deinde reciproce, ex æqualitate laterum concluditur æqualitas angulorum, quod ante erat quæsitum; quæ est synthesis. Itaque ne crede symbolicam hanc hodiernam veteribus in usu fuisse, aut omnino cognitam, neque, ut quidam nimium astuti homines dixere, nescio quam ob causam, dissimulatam. Sed Wallisio laudatoribusque ejus nunc amissis, convertamur ad alia.

DIALOGUS SEXTUS.

DE CYCLOIDE.

B. Post cognitam dimensionem circuli, latere non potest dimensio cycloidis.

A. En tibi de cycloide propositiones viginti duas.

PROPOSITIO I.

Sit semicirculus BCD, cujus centrum A. Supponaturque punctum B moveri uniformiter in arcu

DIALOGUS VI.

BCD, qui sit divisus bifariam in C; et eodem tempore moveri* eadem velocitate in recta AC. Sunt autem anguli ad A recti. Et quia motus rectus centri A æqualis est motui circulari per arcum BCD, quando punctum B est in D, erit descripta a centro A recta, transiens per C, æqualis ipsi arcui BCD.

Sit ea recta AE, cui æquales ponantur DF, BG, nempe, quæ possit decem semiradios, AB; erit ergo AE sive DF æqualis arcui BCD. Compleatur rectangulum BDFG.

Jam ad descriptionem cycloidis, dividatur tum arcus BCD, tum recta BG, in partes æquales quotlibet. Ego utramque lineam secui in partes duodecim; nempe, arcum ad puncta 1.2.3.4.5.C. 7.8.9.10.11.D; et rectam BG in totidem partes ad puncta α.β.γ.δ.ε.ζ.η.θ.ι.κ.λ. Et per illa puncta duxi totidem rectas diametro DB parallelas. Item per singula puncta divisionis arcus BCD, singulas rectas lateri BG parallelas; quas appello *parallelas altitudinis*, ut quæ designant partium circumferentiæ BCD altitudines. Quibus constructis, erit arcus B1, pars arcus BCD, æqualis Bα, parti ipsius rectæ BG, et tota BG toti arcui BCD æqualis.

In recta AE notentur divisiones eædem quæ sunt in recta BG, nempe 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.E. Et radio 1α ducatur arcus αa secans parallelam altitudinis primam in a. Quando ergo punctum B deberet esse, propter motum circularem, in arcu suo ad punctum 1, erit, propter motum rectum centri,

* Sic Edit. 1660 et 1668. Quære "et eodem tempore moveri *punctum* A eadem velocitate," etc.

in puncto a. Motus enim centri non variat altitudines circulatione acquisitas, quæ semper sunt in altitudinum parallelis. Deinde radio 2β ducatur arcus circuli, secans parallelam altitudines secundam in b. Quando ergo punctum B propter motum circularem deberet esse in suo arcu ad 2, erit propter motum rectum centri in eadem parallela altitudinis, ab b; eritque arcus αa æqualis arcui B1, et arcus βb æqualis arcui B2. Item si radio 3γ describatur arcus γc, secans tertiam altitudinis parallelam in c, erit arcus γc tripla arcus B1. Eadem methodo constituuntur reliqua puncta d, e, f, g, h, i, k, l; per quæ puncta cylclois debet transire. Quæ est descriptio cycloidis.

Consectarium primum. Manifestum hinc est, arcus omnes αa, βb, γc, usque ad arcum semicirculi GF, esse in ratione continua arithmetica.

Consectarium secundum. Manifestum quoque est, si plures fierent divisiones, accuratiorem fore cycloidem, ratione arithmetica semper servata: et denique, si arcus ducerentur eadem methodo tot quot duci possibile est, impleretur spatium planum comprehensum duabus lineis curvis, nempe arcu semicirculi GF, et linea cycloide FdB, et denique recta BG.

PROPOSITIO II.

Spatium trilineum inclusum cycloide et duabus rectis BG, GF, æquale est semicirculo ABCD.

Nam arcus GHF, λl, κk, ιi, θh, et cæteri, secundum rationem arithmeticam perpetuo decrescentes, æquales sunt totidem arcubus semicirculorum integris, descriptis a radiis, quorum maximus quidem esset EG, cæteri vero minores

decrescentes, scilicet secundum eandem rationem arithmeticam, donec evanescerent in puncto E. Sed arcus hi constituerent semicirculum, modo radius EG in partes aliquotas divisus sit, in quot partes dividi illum est possibile; constituerent, inquam, semicirculum EGHF. Quare compositæ lineæ BGHF, Bλ *l*, Bκ *k*, Bι *i*, Bθ *h*, Bη *g*, Bζ *f*, et cæteri, omnes eadem methodo descriptibiles, qui dupli sunt arcuum GHF, λ *l*, κ *k*, ι *i*, etc., cuncti constituent spatium duplum semicirculi EGHF. Sed spatium inclusum cycloide et arcu GHF et recta BG, est ipsum spatium quod constituitur a lineis illis compositis BGHF, Bλ *l*, etc. Est ergo spatium inclusum cycloide et arcu GHF et recta BG, duplum semicirculi EGHF. Reliquum ergo spatium inclusum cycloide et duabus rectis BG, FG, æquale est semicirculo. Quod erat demonstrandum.

Consectarium i. Sequitur hinc, spatium comprehensum cycloide et duabus rectis DF, DB, triplum esse semicirculi genitoris. Nam rectangulum totum quod fit a semiperimetro, id est a DF, in diametrum BD, est semicirculi quadruplum.

Consect. ii. Manifestum quoque est, spatium duabus curvis, nimirum cycloide et arcu BCD, et recta DF inclusum, duplum esse semicirculi genitoris ABCD. Est enim semicirculus ABCD unum, quorum trilineum inclusum cycloide et rectis DF, DB est tria.

Consect. iii. Sequitur etiam, rectam quamlibet parallelam basi DF et interceptam a cycloide et arcu BCD, æqualem esse arcui sibi contiguo, sumpto a contactu ad punctum B. Tota enim recta DF æqualis est toti arcui DCB, per hypo-

thesin. Quoniam ergo spatium trilineum comprehensum cycloide, arcu BCD, et recta FD, duplum est semicirculi ABCD, et recta FD dupla est *fc*, erunt singulæ rectæ singulis arcubus (propterea quod similiter generantur) æquales, id est, recta *l* 11 æqualis arcui B 11, recta *k* 10 æqualis arcui B 10; et sic de cæteris.

Consectarium hoc tertium etiam sic demonstratur seorsim.

Sumpto quolibet arcu B 3, cujus sinus productus sit ad cycloidem in *c*, et pars intercepta sit 3 *c*. Quonium ergo, per constructionem, quo tempore per motum circularem punctum B deberet esse in 3, eodem tempore per motum rectum debet descripsisse rectam arcui B 3 æqualem, erit recta 3 *c* ipsi arcui B 3 æqualis. Itaque si vera sit cyclois, non modo basis ejus DF æqualis erit arcui BCD, sed etiam omnis alia recta inter arcum BCD et cycloidem intercepta, basique parallela, erit arcui sibi contiguo terminato in B æqualis.

Quod si motus centri rectus motui circulari per arcum BCD sit inequalis, erunt parallelæ interceptæ arcubus suis contiguis proportionales quidem, sed inæquales; et per consequens, non erit ea vera cyclois quam definivimus.

PROPOSITIO III.

Recta DG dividit bifariam tum triangulum rectilineum BGF, tum partes ejus, nempe spatium cycloidale externum BGF et bilineum BFB.

Secet recta DG cycloidem in *m*. Eritque triangulum rectilineum G 6 F æquale quartæ parti rectanguli BDFG, id est, semicirculo genitori; et tria spatia, nempe triangulum G 6 F, spatium cycloidale

DIALOGUS VI.

externum BFG, et bilineum BFB, inter se æqualia. Rursus, triangulo rectilineo G6F æquale est triangulum rectilineum G6B. Dividitur ergo totum triangulum BGF a recta DG bifariam. Pars ergo cycloidalis spatii comprehensa parte cycloidis F*m* et duabus rectis FG, G*m*, una cum parte bilinei BFB, comprehensa ab eadem parte cycloidis F*m* et duabus rectis F6, 6*m*, æquale est duobus spatiis, nempe cycloidali BG*m* et parti bilinei B*m*6*B*. Cum autem triangulum rectilineum G6F æquale sit spatio cycloidali BFG, ablato communi spatio G*m*B restabit spatium B*m*6B (pars bilinei BFB) æquale spatio FG*m*, parti cycloidalis spatii externi reliquæ. Quare spatium cycloidale ablatum, nempe BG*m*, æquale est parti reliquæ bilinei F6*m*. Si ostendero jam spatium cycloidale FG*m* æquale esse spatio F6*m* parti bilinei BFB, necesse est ut quatuor illa spatia sint inter se æqualia. Dividatur recta G6 bifarium, id est, in *s*, ducaturque recta F*s* secans cycloidem in *n*; eritque triangulum rectilineum GF*s* æquale triangulo *s*F6. Superat autem triangulum GF*s* spatium cycloidale FG*m* spatio trilineo *snm*, minus spatio bilineo F*n*F. Sed triangulum *s*F6 (triangulo GF*s* æquale) superat spatium F6*m* (partem bilinei BFB) eodem spatio trilineo *snm*, minus spatio bilineo F*n*F. Sunt ergo partes trianguli G6F diremptæ a parte cycloidis F*m*, inter se æquales. Itaque recta DG secat tum rectangulum totum BGF tum partes ejus, etc., bifariam. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

Partes duæ cycloidalis spatii BFG, ut et partes

bilinei BFB diremptæ a recta DG æquiponderant super ipsam DG. DIALOGUS VI.

A puncto B ducatur recta B*o* secans rectam DG in ipso arcu BCD: eritque B*o* ad DG (propter arcum semicirculi BCD) perpendicularis; distantia ergo puncti B a recta DG est recta B*o*. Item centro E, radio EG, descripto arcu secante DG in *p*, recta F*p* erit distantia puncti F a recta DG. Et sunt rectæ B*o*, F*p* inter se æquales. Cum ergo spatia FG*m* et *m*GB ostensa sint æqualia, et æqualiter distent a recta DG, quæ dividit illa bifariam, etiam super ipsam DG æquiponderabunt. De partibus bilinei nempe F6*m*, B6*m* eadem est demonstratio. Quare partes, etc. Quod erat demonstrandum.

Per eandem causam demonstrari potest, quod centrum gravitatis etiam spatii cycloidalis interni BFD, terminati cycloide ipsa et duabus rectis BD, DF, est in eadem diagonali DG.

PROPOSITIO V.

Centrum gravitatis spatii cycloidalis externi BGF, est in *s*.

Juncta enim FA et divisa in I, ita ut FI sit ad IA ut 2 ad 1, erit punctum I centrum gravitatis trianguli rectilinei BFD, quod quidem triangulum rectilineum BFD duplum est spatii bilinei BFB. Est autem punctum I in concursu rectarum $\delta\delta$ et DG. Itaque si centrum libræ statuatur in L, ubi I6 dividitur bifariam, erit centrum gravitatis bilinei BFB in K, ubi 6M dividitur bifariam. Est enim triangulum BFD duplum bilinei BFB. Rursus, juncta BE erit divisa in M, ita ut BM sit ad ME ut 2 ad 1, nempe in concursu rectarum DG et

$\theta\theta$. Erit ergo M centrum gravitatis trianguli BFG. Cum ergo centrum gravitatis bilinei BFB sit in K, erit centrum gravitatis spatii cycloidalis externi BGF in *s*, ita ut M*s*, MK sint æquales. Et propterea, punctum *s* est in concursu parallelæ $\iota\iota$ et DG. Quod erat demonstrandum.

Consectarium. Centrum gravitatis spatii interni cycloidalis BFD, est in puncto L, ubi diagonalis DG ita dividitur, ut GL sit ad LD ut 7 ad 5. Cum enim spatium cycloidale internum BFD triplum sit spatii cycloidalis externi BGF, si centrum libræ statuatur in puncto 6, erit 6*s* triplum distantiæ centri gravitatis spatii cycloidalis interni ab eodem puncto 6. Sed 6*s* est triplum 6L. Est ergo centrum gravitatis spatii cycloidalis interni BFD in L. Dividitur autem recta DG, ita ut GL sit ad LD ut 7 ad 5, cum sit L in concursu $\varepsilon\varepsilon$ et DG.

PROPOSITIO VI.

Quadrilineum *m*6CB, comprehensum duabus curvis B*m*, BC, et duabus rectis 6*m*, 6C, æqualis est quadranti ABC.

Secet enim recta 6B arcum BC in *q*. Quoniam ergo triangulum rectilineum AB6 est pars octava rectanguli BDFG, erit idem æquale quadranti ABC. Ablato ergo spatio communi AB*q*C, erit reliquum spatium 6*q*C æquale bilineo B*q*B. Sed spatium 6*m*BC, comprehensum a parte cycloidis B*m* et duabus rectis *m*6, 6C, ostensum est æquale quadranti ABC. Itaque, si ipsi addatur spatium 6*q*C, et eidem auferatur bilineum B*q*B, erit factum spatium *m*6CB, comprehensum duabus curvis B*m*, BC, et duabus rectis *m*6, 6C, æquale (ut ante) quadranti ABC. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Spatium cycloidale internum BA*f*, comprehensum a parte cycloidis B*f* et duabus rectis AB, A*f*, superat semicirculum genitorem, tantum quantum est trilineum 6*fm*.

Nam, per præcedentem, spatium quadrilineum BC6*m* æquale est quadranti ABC. Quare quadrilineum AB*m*6 æquale est semicirculo genitori; cui si addatur trilineum *m*6*f*, fit spatium cycloidale integrum BA*f*. Spatium ergo cycloidale BA*f*, etc. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Si ducatur recta DC, et producatur ad BG in N; juncta FN transibit per punctum *f*.

Cum enim DN transeat per C, erit BN æqualis diametro BD. Et quoniam BG est æqualis arcui semicirculi genitoris, erit GN excessus quo arcus BCD superat diametrum BD. Est autem 6E semissis ipsius BG, et 6*f* semissis diametri sive rectæ BN. Quare recta E*f* est semissis rectæ GN. Etiam FE est semissis FG. Ut ergo FG ad GN, ita FE ad E*f*. Transit ergo FN per punctum *f*. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

Triangulum rectilineum EF*f* æquale est spatio intercepto inter arcum quadrantis ABC et ejusdem subtensam.

Triangulum 6EF æquale est quadranti ABC. Et quoniam 6*f* æqualis est semidiametro, erit triangulum F*f*6 æquale dimidio quadrato ab *f*6. Reliquum igitur triangulum rectilineum FE*f* æquale

DIALOGUS VI.

est reliquo spatio, nimirum, spatio quod relinquitur, dempto a quadrante ABC triangulo rectilineo ABC, id est, spatio incluso intra arcum BC et subtensam ejus. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO X.

Si ducta B*o* producatur ad basim cycloidis BF in *u*, erit recta D*u* duæ quintæ ipsius DF, sive ipsius arcus BCD.

Ostensum enim est in præcedentibus arcum quadrantis, cujus radius est æqualis rectæ BD, æqualem esse rectæ quæ potest decem semiradios, id est, quæ potest decem radios semicirculi genitoris. Est autem DF, per constructionem, æqualis arcui BCD. Quoniam autem angulus B*o*D in semicirculo est rectus, et quatuor rectæ 6G, 6B, 6D, 6F sunt æquales, item quatuor anguli BD*o*, GB*o*, 6DB, 6FD inter se æquales; erunt triangula GDB, BD*o*, D*uo* similia. Est ergo ut BG, id est, arcus BCD, ad DB diametrum, ita BD diameter ad D*u*. Est ergo D*u* æqualis rectæ quam appellavimus Z, sive duabus quintis rectæ quæ potest decem semiradios, id est rectæ BF, id est arcus BCD. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.

Centrum gravitatis bilinei contenti linea cycloidale B*f*F et recta BF, est in eo puncto diagonalis DG, quod ipsam ita dividit in K, ut DK sit ad KG ut 7 ad 5.

Est enim triangulum AFD quarta pars rectanguli DG, id est, æqualis semicirculo genitori: et triangulum BFD æquale duplo semicirculo genitori. Quoniam autem centrum gravitatis trianguli AFD

est in recta DG ad I: (nam FI est ad IA ut 2 ad 1, et ostensum est centrum gravitatis figuræ cycloidalis comprehensæ cycloide B*f*F et duabus rectis BD, DF, esse in puncto L, et bilineum BFB æquale esse semicirculo genitori): erit bilineum unum, quorum triangulum rectilineum BFD, vel etiam BFG, est duo. Quoniam ergo centrum gravitatis figuræ B*f*FD, quod est tria, est in L, erunt IL, LK inter se in ratione reciproca magnitudinum KL et LI. Si ergo punctum L statuatur centrum libræ, triangulum BFD et bilineum BFB, suspensa in I et K, æquiponderabunt. Est ergo K centrum gravitatis bilinei BFB. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Planum inclusum intra arcum quadrantis et subtensam ejusdem arcus, est ad trilineum conclusum ab eodem arcu quadrantis et duos radios in angulo recto concurrentes, ut sexta pars semiperimetri circuli genitoris una cum tertia parte excessus ipsius semiperimetri supra tres radios ejusdem circuli, ad dictam sextam partem semiperimetri mulctatam duabus tertiis prædicti excessus circuli genitoris supra tres radios.

Centro E, radio EG vel EF, describatur semicirculus GRF, secans EA in R. Eritque R8 æqualis C4 vel 10*f*, id est, tertiæ parti excessus rectæ AE, sive arcus GRF, supra tres radios sive triplam AC.

Nam ostensum est (*Prop.* ix) quod triangulum rectilineum FE*f* æquale est plano incluso intra arcum quadrantis et ipsius subtensam, id est, bilineo RFR. Ducatur RS perpendicularis ad FD in S. Jam duplum planum RFR una cum trilineo incluso intra FS, SR et arcum FR, constituunt

DIALOGUS VI.

planum quadrantis ERF. Quoniam igitur triangulum rectilineum EF*f* et bilineum RFR sunt duplum bilineum RFR, erit triangulum rectilineum reliquum F*f*R æquale trilineo FSR incluso intra radios FS, SR et arcum quadrantis FR. Est ergo bilineum RFR ad trilineum FSR, ut E*f* ad *f*R; id est, ut sexta pars semiperimetri circuli genitoris una cum tertia parte excessus ipsius semiperimetri supra tres radios ejusdem circuli, ad dictam sextam partem semiperimetri mulctatam duabus tertiis prædicti excessus semiperimetri circuli genitoris supra tres radios. Quod erat demonstrandum.

Consect. i. Rectangulum sub SR, R*f* æquale est duplo trilineo FSR; et rectangulum sub FE, E*f* æquale duplo bilineo RFR; propterea quod æqualia sunt, alterum duplo triangulo F*f*R, alterum duplo triangulo FE*f*.

Consect. ii. Rectangulum sub SR et dupla R8 est æquale excessui quo segmentum RFR superat trilineum conclusum rectis FS, SR et arcu quadrantis FR: quod trilineum est complementum quadrantis ad quadratum radii. Nam rectangulum FE*f* superat rectangulum SR*f* duplo rectangulo SR in 8R. Quare triangulum FE*f* superat triangulum SR*f* ipso rectangulo SR in 8R.

PROPOSITIO XIII.

Trilineum 6*fm*, clausum duabus rectis 6*m*, 6*f* et parte cycloidis *fm*, æquale est trilineo FE*f*, clauso duabus rectis FE, E*f* et parte cycloidis F*f*.

Est enim planum, clausum parte cycloidis F*fm* et duabus rectis F6, 6*m*, æquale quadranti ERF (*Prop.* iii). Ablato ergo communi spatio trilineo F*f*RF, clauso duabus curvis, nempe arcu FR et

parte cycloidis F*f*, et recta *f* R, restabunt ex altera parte trilineum FE*f*, ex altera parte 6*mf*, inter se æqualia. Quod erat demonstrandum. DIALOGUS VI.

PROPOSITIO XIV.

Trilineum 6*fm* æquale est complemento quadrantis ERF ad quadratum radii ER.

Sunt enim triangula rectilinea FE*f*, FR6 æqualia, propter altitudinum inter se, et basium inter se æqualitatem. Quare utrumque eorum æquale est bilineo RFR. Est autem tam triangulum rectilineum 6EF, quam trilineum 6F*m*, æquale quadranti ERF, et proinde æqualia inter se. Itaque si auferatur commune triangulum rectilineum F*f*R, restabunt ab una quidem parte duo triangula FE*f*, FR6, quæ sunt inter se æqualia, et ambo simul æqualia duplo bilineo RFR; ab altera vero parte duo trilinea, nempe triangulum rectilineum F*f*R, et trilineum 6*fm*, quæ ambo simul æqualia sunt duplo complemento quadrantis ERF ad quadratum radii ER. Sed cum duo triangula FE*f*, FR6 æqualia sint duplo bilineo RFR, erit triangulum F*f*R æquale uno complementorum prædictorum: est enim quadrans æqualis duplo bilineo RFR una cum complemento ipsius quadrantis ad quadratum radii. Quare trilineum 6*fm* æquale est altero complementorum. Trilineum ergo 6*fm*, etc. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XV.

Spatium cycloidale AB*f*, terminatum duabus rectis AB, A*f* et curva B*cmf*, æquale est quadranti ABC una cum quadrato ABzC.

Ostensum enim est (*Prop.* vi) quod quadrilineum

DIALOGUS VI.

*m*6CB terminatum duabus rectis *m*6, 6C, et duabus curvis, arcu BC et curva B*cm*, est æquale quadranti ABC. Cui additum spatium 6*fm*, æquale, ut in præcedente ostensum est, complemento quadrantis ABC ad quadratum AB*z*C, facit planum comprehensum a duabus curvis B*mf* et arcu BC, et a recta *f*C, æquale quadrato AB*z*C. Cui si addatur rursus ipse quadrans ABC, fit totum planum, terminatum duabus rectis AB, A*f*, et curva B*mf*, æquale utrique simul, quadranti ABC et quadrato AB*z*C. Quod erat demonstrandum.

B. Cum rectangulum *fπz*C duplum sit quadrantis ABC, et rectæ parallelæ, quæ complent trilineum *f*BC*f*, crescant a puncto B secundum progressionem arithmeticam usque ad C*f* æqualem arcui BC, ego credidissem, juxta doctrinam Wallisii in sua *Arithmetica Infinitorum*, spatium planum *f*BC*f* æquale esse dimidio rectangulo *fπz*C, id est quadranti ABC.

A. Vides ergo regulæ Wallisianæ falsitatem, et quod extra figuras rectangulas et earum partes nihil valet.

Consect. i. Si ducatur recta B*f*, erit factum spatium bilineum B*f*B æquale dimidio quadrato AB*z*C. Ducta enim recta *fπ* perpendiculari ad BG in *π*, et juncta *fz*, erit rectangulum *fz*, contentum sub *f*C, quæ æqualis est arcui ABC, et sub radio *fπ*, æquale duplo quadranti ABC; et proinde totum rectangulum B*f* æquale duplo quadranti una cum quadrato AB*z*C. Et triangulum rectilineum AB*f* æquale uni quadranti ABC una cum dimidio quadrati AB*z*C. Quare quod restat, bilineum B*f*B, æquale est alteri dimidio quadrati AB*z*C.

Consect. ii. Recta fz ita secat cycloidem, puta in c, ut bilineum cfc et trilineum czB sint inter se æqualia; quod ex eo manifestum est, quod spatium cycloidale fABmf, et quadrilaterum rectilineum ABzf sunt inter se æqualia.

Consect. iii. Triangulum rectilineum fzB æquale est bilineo fBf. Est enim triangulum fCz, cujus latus fC æquale est arcui BC, et latus Cz æquale radio AC, æquale quadranti ABC. Quoniam autem triangulum fzB una cum quadrato ABzC æquale est spatio cycloidali fBA, ablato communi triangulo rectilineo fAB, erit reliquum triangulum fzB æquale reliquo bilineo fBf, id est, dimidio quadrato ABzC.

PROPOSITIO XVI.

Solidum descriptum a plano cycloidali BfFDB, moto super basem DF per quadrantem circuli, est æquale duabus tertiis solidi quod fit a rectangulo DG, moto item super eandem basem et per quadrantem circuli.

Intelligatur rectangulum DG moveri super basem DF immotam, donec rectæ DB, FG, cæteræque intermediæ parallelæ descripserint singulæ suos quadrantes; quo facto, dictum rectangulum DG insistet plano chartæ perpendiculariter, in communi sectione DF; eritque descripta quarta pars cylindri recti. Erit autem arcus quadrantis, descripti ab unaquaque parallelarum dictarum, æqualis arcui BCD, et quotalibet pars ejus æqualis parti cognomini arcus BC. Præterea, sinus rectus quotælibet partis arcus quadrantis descripti a DB, æqualis erit chordæ arcus cognominis descripti ab AB. Ubi enim arcus quadrantis arcui semicirculi

DIALOGUS VI.

est æqualis, si sumantur in utroque eædem partes, quæ recta chorda est arcus sumpti in semicirculo, eadem recta erit sinus rectus arcus analogi in quadrante. Itaque si ducatur recta parallela et æqualis rectæ DB, terminata in DF et BG, secans cycloidem in 1, parte duodecima arcus BCD, erit chorda B1 æqualis sinui recto partis duodecimæ arcus quadrantis descripti radio qui sit æqualis rectæ DB. Quare si in arcu quadrantis, descripti a parallela per 1, sumatur pars ejus duodecima, et demittatur inde in chartæ planum recta perpendicularis, incidet illa in parallelam altitudinis quæ transit per 1.

Similiter ostendi potest, quod si sumatur pars sexta, id est arcus B2, sinus rectus duarum duodecimarum partium arcus quadrantis descripti a parallela per *a*, ea incidet perpendiculariter in parallelam altitudinis quæ transit per 2. Et sic de cæteris partibus quadrantis. Itaque arcus quadrantum descriptorum a rectis parallelis ipsi DB, decrescunt in ratione arithmetica, donec evanescant in puncto F. Plana autem quadrantum eorundem decrescunt in ratione arcuum duplicata. Quare aggregatum quadrantum omnium, descriptorum a dictis parallelis sumptis usque ad cycloidem, id est, solidum descriptum a plano cycloidali B*f*FDB, est ad solidum descriptum a conversione spatii cycloidalis externi BGF*f*B, et ad solidum descriptum a rectangulo DG, ut 2 ad 3. Quod erat demonstrandum.

Consectarium i. Sequitur hinc quod solidum descriptum a triangulo FBD, solidum descriptum a bilineo BFB, et solidum descriptum a plano cycloidali externo BGF*f*B, esse inter se æqualia;

et unum quodlibet eorum æquale quartæ parti coni ejusdem altitudinis et basis cum cylindro descripto a rectangulo DG. Est enim conus, id est, solidum descriptum a triangulo rectilineo DGF converso super rectum DF, tertia pars cylindri descripti a revolutioni rectanguli DG super eandem rectam DF.

Consect. ii. Manifestum hinc est eadem methodo demonstrari posse, sumpta quavis alia parallela altitudinis, ut A*f*, terminata ex una parte in diametro DB, ex altera parte in cycloide, et ducta *f*π perpendiculariter ad BG, quod solidum factum a conversione plani cycloidalis B*mf*A circa rectam A*f* per quadrantem circuli, æquale esse duabus tertiis solidi facti eodem tempore a conversione rectanguli Aπ supra eandem A*f*.

PROPOSITIO XVII.

Centrum gravitatis semicirculi genitoris ABCD ita dividit radium AC in O, ut pars AO sit $\frac{2}{15}$ arcus BCD.

Si fiat ut tertia pars arcus BCD ad tertiam partem subtensæ, id est, diametri BD, ita duæ tertiæ radii AB, id est, una tertia diametri BD, ad quartam, erit terminus illius quartæ sumptæ ab A versus C centrum gravitatis semicirculi ABCD (lib. i, cap. ix, prop. i, *Guldini* de *Centro Gravitatis*). Sit terminus ille O.

Est ergo tertia pars diametri BD media proportionalis inter tertiam partem arcus BCD et AO. Quoniam ergo diameter (per superius demonstrata) est media proportionalis inter arcum BCD et duas quintas arcus ejusdem, etiam tertia pars diametri erit media proportionalis inter tertiam partem arcus BCD et tertiam partem duarum quintarum,

DIALOGUS VI.

sive sex quindecimarum, dicti arcus BCD. Sed tertia pars sex quindecimarum est $\frac{2}{15}$. Quare AO est $\frac{2}{15}$ arcus BCD, sive rectæ AE vel DF. Itaque centrum gravitatis semicirculi genitoris ABCD ita dividit radium AC in O, ut pars AO sit $\frac{2}{15}$ arcus BCD. Quod erat demonstrandum.

Coroll. Ducta ab O recta Oν parallela diametro BD, secans rectam Az in ν, erit punctum ν centrum gravitatis quadrantis ABC.

ALITER.

Si fiat ut arcus BC ad duas tertias subtensæ BC, ita Aξ semisubtensa ad quartam sumendam ab A versus C, erit terminus ejus centrum gravitatis semicirculi. Demonstratum est a *Jo. de la Faille*, prop. xxxvi. Sed ut arcus BC ad subtensam BC, ita subtensa BC ad $\frac{2}{5}$ arcus BC, id est, ad unam quintam totius BCD. Quare, ut arcus BC ad $\frac{2}{5}$ subtensæ BC, ita Aξ, id est, semisubtensa, ad duas tertias duarum quintarum arcus BC, id est, ad unam tertiam duarum quintarum totius arcus BCD, id est, ad $\frac{2}{15}$ arcus BCD. Quod erat demonstrandum.

B. Si fiat semicirculus æneus accuratus, qui sit ejusdem ubique crassitudinis, isque in puncto O tenui filo suspensus maneat plano horizontis parallelus, quin recta DF æqualis sit arcui semicirculi genitoris, dubitari amplius non potest.

A. Etsi experimenta talia vim non habeant demonstrationis, juvat tamen operis cum contemplatione consensio. Itaque semicirculum æneum fieri curavi, et suspendi ab eo puncto, et parallelismum horizontalem inveni exactissimum. Sed procede.

PROPOSITIO XVIII.

Invenire centrum gravitatis segmenti BCB, contenti arcu quadrantis et subtensa arcus BC.

Invento centro gravitatis trianguli rectilinei ABC, fiat ut segmentum BCB ad triangulum ABC, ita distantia inter centra gravitatis quadrantis ABC et trianguli ABC ad aliam. Et illa inventa ponatur a puncto ν versus arcum in eadem recta Az, nempe νr, et erit r centrum quæsitum. Datur autem ratio bilinei BCB ad triangulum ABC, nempe ratio FR ad FE, et est centrum gravitatis segmenti BCB in recta Az, in qua sunt centra gravitatis tum trianguli tum quadrantis ABC. Datur ergo punctum r, id est, centrum gravitatis segmenti BCB. Factum ergo est, quod erat faciendum.

B. Video etiam aliud sequi scitu non indignum, nimirum, planum, quod nascitur ab aggregatione rectarum, quæ æquales sunt partibus arcus BC perpetuo a nihilo crescentibus juxta rationem arithmeticam, quando applicantur ordinatim ad terminos curvarum sibi æqualium, nempe B1, B2, B3, etc., æquales esse plano quod nascitur ab aggregatione sinuum rectorum eorundem arcuum, quando illi sinus ordinantur singuli ad terminos arcuum suorum in recta quæ sit ipsi arcui BC æqualis. Nam quod aggregatum sinuum rectorum omnium ita ordinatorum æquale est quadrato radii, demonstrarunt fortasse plures, sed invenit et demonstravit primus Christopherus Wren, astronomiæ professor Greshamensis.

PROPOSITIO XIX.

Solidi, quod fit a conversione trianguli rectilinei FDB per quadrantem circuli super basem FD, centrum gravitatis est in plano quadrantis descripti semidiametro $\gamma\gamma$ et erecti ad planum chartæ, et in ea recta quæ ducta a puncto γ dividit arcum ejusdem quadrantis bifariam, distatque a puncto γ, quod est in basi, tantum quanta est dodrans duplæ rectæ A ν.

Factum enim solidum a revolutione integra trianguli FDB super basem FD, est conus cujus centrum gravitatis dividit basem FD ita ut pars ad verticem sit ad reliquam ut 3 ad 1, id est in γ. Quare planum erectum ad planum chartæ in communi sectione FD secans eam in γ, est planum æquilibrii tum ipsius coni, tum etiam dimidii vel quotælibet partis ejus. Planum enim æquilibrii dividit hæc in momenta æqualia. Est ergo centrum æquilibrii solidi, quod fit a quarta parte conversionis trianguli FD, in plano quadrantis descripti a $\gamma\gamma$ et erecti ad planum chartæ. Quoniam autem arcus quadrantis descripti a DB duplus est arcus BCD descripti ab AB, et centrum gravitatis semicirculi BCD distat a centro A intervallo AO, erit centrum gravitatis semicirculi descripti a DB in distantia a centro D tanta, quanta est dupla AO. Sumatur DT æqualis duplæ AO, ducaturque FT secans $\gamma\gamma$ in V. Quare, quando in conversione trianguli FDB recta DT fit plano chartæ perpendicularis, erit punctum T centrum gravitatis semicirculi descripti a diametro DB. Secet recta FB rectam $\gamma\gamma$ in X. Quare quando in conversione trianguli FDT, γV est ad planum chartæ erecta,

erit punctum V centrum gravitatis semicirculi descripti a semidiametro γX. Et sic continget in intersectionibus rectarum omnium, quæ sunt parallelæ rectæ DB, cum recta FT, ut centra gravitatis quadrantum descriptorum ab ordinatis in triangulo FDB, sint in intersectionibus ipsarum ordinatarum cum recta FT. Sed intelligendum est triangulum FDT erectum esse ad planum chartæ. Itaque omnes semicirculi, descripti a conversione trianguli FDB super basem FD, æquiponderabunt super rectam FT, erectam ad planum chartæ. Sed quod equiponderabunt etiam super $\gamma\gamma$ similiter erectam, manifestum est ex eo, quod $F\gamma$ est ad γD, ut 3 ad 1. Est ergo centrum gravitatis semiconi, descripti a triangulo FDB, in puncto V elevato perpendiculariter super planum chartæ sive horizontis in γ; et distat a puncto γ, quod est in base, tantum quanta est $\frac{2}{5}$ arcus semicirculi descripti a semidiametro γX, sive dodrante rectæ DB.

Rursus, quoniam centrum gravitatis quadrantis ABC est ad ν in recta Az, quæ dividit arcum BC bifariam, erit quoque centrum gravitatis quadrantis descripti a DB in recta quæ dividit arcum quadrantis ejusdem bifariam; distabitque tantum a puncto D quanta est dupla $A\nu$. Sumatur $D\phi$ æqualis duplæ $A\nu$, ductaque $F\phi$ secet rectam $\gamma\gamma$ in v. Quoniam ergo $D\phi$ est distantia centri gravitatis quadrantis descripti semidiametro DB a puncto D, et $A\nu$ est in recta quæ dividit arcum BC bifariam, erit quoque γv distantia centri gravitatis quadrantis descripti a γX, et in recta quæ dividit arcum ejusdem quadrantis γX bifariam. Idem accidit in cæteris omnibus ordinatis trianguli FDB. Est igitur $F\phi$ diameter æquilibrii solidi, quod fit a con-

versione trianguli FDB super basem FD: et recta $\gamma\upsilon$, sumpta in recta quæ dividit arcum quadrantis descripti a γX bifariam, diameter æquilibrii altera, et $\gamma\upsilon$ dodrans sive $\frac{3}{4}$ rectæ Dϕ, id est, duplæ Aν. Itaque punctum intersectionis ambarum $\gamma\upsilon$ et Fϕ, id est, punctum ipsum υ, est centrum gravitatis solidi quod fit a conversione trianguli FDB per quadrantem circuli. Quare solidi quod fit, etc. Quod erat demonstrandum.

Consect. Centrum gravitatis quartæ partis cylindri descripti a conversione integra rectanguli DG super latus FD, est in plano quadrantis descripti a $\xi\xi$, in distantia a puncto ξ, quod est in base, tanta quanta est Dϕ, et est in recta quæ dividit arcum ejusdem quadrantis bifariam. Et centrum gravitatis dimidii cylindri ejusdem, est in recta quæ ex ξ erigitur plano chartæ perpendicularis in distantia æquali rectæ DT.

PROPOSITIO XX.

Invenire centrum gravitatis solidi, quod fit a conversione plani cycloidalis DBF circa basem DF per circuli quadrantem.

Sumatur $\xi\chi$ æqualis rectæ Dϕ, et collocetur unus ejus terminus in recta DF ad ξ, et alter terminus in plano quadrantis erecti ad planum chartæ in $\xi\xi$, ita ut $\xi\chi$ faciat cum recta $\xi\xi$ angulum semirectum; jungaturque $\upsilon\chi$, seceturque $\delta\epsilon$, tam supra quam infra, bifariam a recta $\sigma\sigma$, quæ secet $\upsilon\chi$ in τ. Dico punctum τ esse centrum gravitatis solidi propositi.

Quoniam enim solidum propositum est ad solidum descriptum eodem tempore a rectangulo DG ut 2 ad 3, (prop. xvi), et centrum gravitatis solidi

facti a rectangulo DG est in plano erecto ad chartam in $\zeta\zeta$, et utriusque centrum gravitatis in recta quæ facit cum diametro sui quadrantis angulum inclinationis semirectum, cumque centrum gravitatis solidi a conversione simili trianguli DBG sit similiter positum ad planum super $\gamma\gamma$, erit centrum gravitatis solidi propositi, propter rationem magnitudinum 2 ad 1, in eo plano quod distat a plano per $\zeta\zeta$ ex altera parte, ita ut distantia $\iota\zeta$ sit ad distantiam ejus, ex altera parte reciproce ut 2 ad 1. Erit ergo centrum gravitatis solidi propositi in plano quod ad planum chartæ est erectum in $\sigma\sigma$. Nam $\iota\zeta$ est 3, quorum $\zeta\sigma$ est $\frac{3}{2}$. Rursus, centrum gravitatis solidi propositi est in recta, quæ facit cum recta $\sigma\sigma$ angulum semirectum. Rectarum $\delta\delta$, $\upsilon\chi$, intersectio sit ω. Quoniam jam $\omega\upsilon$ est ad $\omega\tau$ ut 2 ad 1, id est, in ratione solidi propositi ad solidum factum a simili conversione trianguli DBF; et centrum gravitatis solidi a triangulo DBF est in υ; si fiat ω centrum libræ, distabit centrum gravitatis solidi propositi a centro libræ ω, ita ut distantia $\upsilon\omega$ sit dupla distantiæ centri gravitatis solidi propositi ab eodem puncto ω. Erit ergo in τ. Quod erat demonstrandum.

Consect. Sequitur hinc punctum ω, positum item in recta $\delta\omega$, ita ut faciat cum recta $\delta\delta$ angulum semirectum, esse centrum gravitatis utriusque simul solidi, nempe solidi propositi, et solidi facti a simili conversione trianguli DBF.

B. Credo equidem, et præterea punctum C esse centrum gravitatis utriusque simul solidi, nempe solidi propositi, et solidi quod fit a conversione simili plani cycloidalis externi BFG. Video etiam basem FD ita dividi a plano æquilibrii $\sigma\sigma$, ut pars

DIALOGUS VI.

Fσ sit ad reliquam ut 5 ad 3, ut fit in semiparabola; nec mirum, cum ratio solidi propositi sit ad suum complementum eadem quæ plani semiparabolici ad complementum suum. Cæterum BD non dividitur in 3 ad 2, ut diameter semiparabolæ. Cujus rei causam non video.

A. Neque ego; sed neque quare ita esse debeat. Ex iis, quæ demonstrata sunt de ratione propositi solidi, facti a conversione ejus circa basem FD, ad solidum factum a simili conversione rectanguli DG, et de centris gravitatis ipsorum, methodus apparet inveniendi rationem solidi facti a conversione cujuslibet partis ejus abscissæ a parallela altitudinis quacunque. Nam si planum cycloidale, cujus basis (exempli causa) est A*f*, convertatur super basem suam A*f*, recta quidem AB describet quadrantem integrum, reliquæ autem ipsi parallelæ describent arcus quadrantum minores semper in ratione arithmetica, donec in puncto *f* describatur nihil. Ex quo, ut ante, inferetur solidum factum a conversione plani cycloidalis AB*f* super basem A*f*, duplum esse solidi quod fit a simili conversione trianguli *f*AB. Cognitisque magnitudinum rationibus, invenientur, ut ante, eorum centra gravitatis.

PROPOSITIO XXI.

Solidum factum a conversione rectanguli DG per quadrantem circuli, circa diametrum circuli genitoris DB, (quæ est cylindri totius sic facti altitudo), est ad solidum factum a conversione ejusdem rectanguli DG circa rectam DF, (quæ est cylindri hujus altitudo), ut DF ad illius altitudinem DB.

Sunt enim cylindri inter se in ratione composita

basis ab basem, (id est, diametri basis ad diametrum basis duplicata), et altitudinis DB ad altitudinem DF. Sunt autem rectæ DF, DB, D*u* continue proportionales (prop. x). Est igitur basis ab basem, ut DF ad D*u*. Componitur ergo ratio cylindri, facti a conversione plani DG circa altitudinem proprium DB, ad cylindrum factum a conversione circa altitudinem propriam DF, ex rationibus altitudinis DF ad D*u*, et DB diametri basis ad DF, hoc est, rectæ D*u* ad altitudinem DB. Si componantur ergo ratio BD ad D*u*, (id est, ratio basis ab basem), et ratio DB ad DF, id est, D*u* ad DB, erit ratio cylindri facti a conversione ejusdem rectanguli DG circa DB, ad cylindrum factum a conversione ejusdem rectanguli circa DF, in ratione composita ex rationibus DF ad D*u*, et D*u* ad DB; et propterea, cylindrus ad cylindrum, et proinde $\frac{1}{4}$ illius ad $\frac{1}{4}$ hujus, est ut DF ad DB. Quod erat demonstrandum.

B. Si certum esset quod cylindri sunt inter se in ratione composita ex rationibus basis ad basem, et altitudinis ad altitudinem, dubitari non posset de theorematis hujus veritate. Sed ubi est hoc demonstratum?

A. Demonstravit Hobbius, libro DE CORPORE (cap. xiii, art. 14). Quod caput ipse Wallisius non improbavit, sed quia nihil in eo reperit quod potuit rodere, Hobbii ipsius esse negavit. Non quod alienum revera esse putaret, sed quia instituto ejus mentiri expedivit. Theorema hoc non modo in quantitatibus factis, sed etiam in omni genere rerum factarum verum est. Neque arte logicæ, sed ratione tantum naturali opus est ad veritatem ejus agnoscendam. Satis enim manifestum est,

DIALOGUS VI.

quod omnis effectus naturalis ad omnem effectum naturalem rationem habet compositam ex rationibus earum rerum quæ causas eorum componunt integras. Nihil enim in effectu esse potest, quod non fuit in aliqua parte causæ suæ; nec in causa, quod non in effectum derivetur.

B. Mihi nova quidem hæc contingit doctrina, attamen verissima est; et procedens a contemplatione quæ in iis qui jurant in verba magistrorum, raro invenitur. Videamus jam consectaria.

Consect. i. Conus, qui fit a conversione trianguli FDB circa DB diametrum circuli genitoris, est ad conum qui fit a conversione ejusdem trianguli circa DF, ut DF ad DB. Sunt enim ut ipsi cylindri. Habent autem vertices, ille in B, hic in F.

Consect. ii. Solidum factum a conversione plani cycloidalis DB*f*F circa DB, est ad solidum factum a conversione ejusdem plani cycloidalis circa DF, ut DF ad DB. Sunt enim ut ipsi coni.

Consect. iii. Excessus cylindri facti a conversione rectanguli DG circa DB, super solidum factum a conversione plani cycloidalis DB*f*F circa eandem DB, est ad excessum cylindri facti a conversione rectanguli DG circa DF, super solidum factum a conversione plani cycloidalis DB*f*F circa eandem DF, ut DF ad DB. Sunt enim hi quoque ut cylindri ipsi.

PROPOSITIO XXII.

Centrum gravitatis semicirculi, cujus diameter est DF, id est, recta æqualis arcui BCD, est in recta quæ, ducta a centro, dividit ipsum semicirculum bifariam, et distat a centro D tantum quanta est recta æqualis duabus tertiis semiradii AB.

Ostensum enim est, quod centrum gravitatis semicirculi ABCD est in recta AC, quæ a centro A dividit semicirculum ABCD bifariam; distatque a puncto A tantum quanta est AO, id est, quanta est duæ quindecimæ rectæ DF, sive arcus BCD. Sed in omnibus semicirculis centra gravitatis situm habent similem. Quare centrum gravitatis semicirculi, cujus diameter est DF, distat a puncto D tantum quanta est duæ quindecimæ arcus semicirculi, cujus diameter est DF, æqualis arcui BCD. Est autem arcus semicirculi, cujus diameter est æqualis arcui BCD, æqualis (per prop. ii*) quinque semiradiis, sive quintuplæ BO. Itaque centrum gravitatis distat a centro D, tantum quanta est duæ quindecimæ quintuplæ AB, id est, duæ tertiæ semiradii AB. Quod erat demonstrandum.

Consect. Dato centro gravitatis semicirculi, datur quoque centrum gravitatis dimidii ejus; atque etiam cujuslibet sectoris qui sit semicirculi quotalibet pars.

B. Methodo, ut videtur, eadem qua centra gravitatis partium cylindri facti a conversione plani DG circa DF inventa sunt, inveniri possunt etiam centra gravitatis partium cylindri facti a conversione ejusdem plani DG circa DB. Quid ergo ea quæ restant non demonstras?

A. Primo, quia hæc parata habui; cætera nondum contemplatus sum. Secundo, quia alia figura describenda esset, in qua semicirculus, cujus diameter est DF, esset describendus, et non paucioribus lineis quam hæc onerata est, oneranda; id quod mihi quidem operæ pretium esse non videtur. Nam

---

* Frustra quæretur in tractatu hoc propositio supra citata.

semicirculorum quidem, et quadrantum, et aliorum sectorum centra gravitatis cognoscere, utilitatem aliquam habet ad magna ædificia, propterea quod saxa grandia talis formæ, appensa a centris gravitatum suarum, elevari in altum possunt horizontaliter, et proinde apte collocari; quod aliter fieri non potest, sine multo labore, atque etiam periculo ne, dum vectibus detorqueantur, diffringantur.

B. Redigis mihi in memoriam fabulam vulpis et racemi.

A. Irride quantum libuerit. Ego hæc nihilominus relinquam illis quibus longius speratur tempus vivendi. Credo te qui demonstrationibus legendis animum acriter intendere solitus es, satis jam tandem defatigatum esse.

B. Ego vero minime. Delector enim paradoxis, qualia sunt hæc, quæ legimus fere omnia.

A. Itane ais?

B. Quid ni? Quod punctum magnitudinem, etsi aliquando non consideratam, aliquam tamen habeat, paradoxum non est?

A. Est quidem, sequutis doctorum authoritatem; utentibus autem ratione propria, paradoxum non est.

B. Quod ratio ea quidem, quam habent inter se duo inæqualia, quantitas sit, ea vero, quam habent duo æqualia, quantitas non sit, paradoxum est. Quod in tribus continue proportionalibus, quorum primum est minimum, ratio primi ad secundum semissis est rationis primi ad tertium: quod angulus rectilineus est quantitas conversionis radii circa centrum: quod angulus contactus est quantitas, esse tamen angulos ad quos ille rationem habeat nullam: deinde illa, quæ hinc deduxisti,

nempe, latus quadrati, quod quadratum æquale sit decem quadratis a quarta parte diametri, æquale sit arcui quadrantis, contra Archimedem: quod arcum vel angulum dividis in rationem datam: quod centrum gravitatis semicirculi tantum distat a centro circuli, quanta est $\frac{2}{15}$ arcus ejusdem semicirculi: nonne hæc tua et Hobbiana paradoxa sunt geometrica? DIALOGUS VI.

A. Sunt quidem paradoxa; nihil tamen impedit quo minus vera sint. Et fortasse in rebus, quales sunt hæ, speculationis aliquanto profundioris, nihil tam parodoxum est quam ipsa veritas.

B. Paradoxum quoque est, quod regulam algebræ, id est delicatorum hominum geometriam totam, in figuris curvilineis parum aut nihil valere dicis.

A. In scriptis geometricis aliorum nulla credis esse paradoxa? Primo, lineam latitudinem non habere, et tamen duci posse? Secundo, angulum planum esse inclinationem quam habent duæ lineæ concurrentes, in ipso puncto concursus? Tertio, posse transiri a majore ad minus per omnia media, nec tamen per æquale? Quarto, duplicatum minus esse quam simplum?

B. Cujus hoc sit non memini.

A. Nonne omnes affirmant in ratione minoris ad majus duplicata, exempli causa, in his continue proportionalibus 1, 2, 4, rationem 1 ad 4 duplicatam esse rationis 1 ad 2; iidem tamen, cum Euclide (Elem. v. prop. 8), rationem 1 ad 2 quæ est simpla, majorem esse quam ratio 1 ad 4 quæ est duplicata?

B. Non sunt hæc paradoxa.

A. Quid ergo sunt?

B. Absurda. Sed ultimum hoc, de duplicata ratione, ex eo natum esse videtur, quod Euclides utitur voce διπλασίονι semper pro *duplicata*, nunquam pro *dupla*.

A. Quid autem? An geometram decet theorematum veritatem ex usu verborum, an ex rebus ipsis recte conceptis, æstimare? Sed quod Euclidem ais nunquam uti voce διπλασίονι pro duplo, verum non est. Lege Elem. iii. prop. 20, quæ sic se habet: ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, etc.

B. Tua illa, quanquam paradoxa, vera tamen sunt, ut mihi videntur, et futura aliquando *endoxa*. Interea tu, qui defendis omnem doctrinam Hobbianam, quid dicturus es ad ea quæ habet in Physica sua et Politica? Et primo, in physica, quod omnium rerum naturalium causas dicit esse motum, eumque moti et contigui corporis?

A. Sive verum hoc sit sive falsum, paradoxum certe non est. Nam Aristoteles, quem sequitur schola, idem dicit, si non et amplius, cum dicat *naturam* nihil aliud esse præter *motum;* motum autem proprium esse corporis. Quod internum esse dicat, non negat quin causam habeat in externo. Nam affirmat alibi, *nihil posse movere seipsum.* Ab hoc principio orsus, causas qualitatum sensibilium et phænomenων naturalium fere omnium satis probabiles deducit Hobbius; id quod illi, quibus principium hoc videtur falsum, facere nunquam poterunt.

B. Maximam partem effectuum naturalium deducit ille a motu quodam, quem vocat *circularem simplicem;* quem motum, vereor ne lectores, exceptis paucis, non satis concipiant. Nam etsi talis

motus ad producenda phænomena naturæ fere omnia sit omnium motuum aptissimus, quia tamen a nemine ante illum animadversus et explicatus est, lectores pauci ductum orationis, qua motus ille describitur et computatur, facile sequi possunt.

A. Si quis manu teneat corpus aliquod figuræ cujuscunque, puta pilam, e qua pila promineret stylus scriptorius; an difficile est imaginari, quo modo ille eo stylo possit literam aliquam alphabeti ductu continuo exarare?

B. Nihil facilius.

A. Quod si plures simul styli prominerent, ita ut tabellam aliquam omnes simul tangerent; nonne idem eodem tempore literas plures exarare poterit?

B. Mille, si vult, et tot sint styli. Sed illæ erunt omnes inter se similes et æquales.

A. Id quidem manifestum est. Sed quis interea motus et qualis dicetur totius pilæ?

B. Profecto, quem motum habet unius styli cujuslibet cuspis, eundem habebit cuspis styli alterius cujuscunque; imo vero punctum unum quodlibet tum pilæ tum manus.

A. Motus jam pilæ ipse est, quem appellat ille *motum circularem simplicem*, non modo quando pilæ puncta describunt circulos, sed etiam quando quaslibet alias describunt figuras, modo puncta illa motu suo ad loca redeant unde moveri inceperunt. Cujus motus proprietas una est, ut quælibet linea in pila sumpta feratur sibi semper parallela. Notandum est etiam hoc, quod naturæ non repugnat tali motu, quamquam velocissimo, describi posse figuram etiam minutissimam. Hunc motum telluri quidem toti attribuit Copernicus; Hobbius autem

etiam soli, et planetis omnibus, et singulis etiam minimis eorum partibus. Aliam ejusdem motus proprietatem ostendit esse, quod heterogenea segregans congregat homogenea. Atque ex his proprietatibus causas reddit omnium fere phænomenωn naturalium satis probabiles, tantas ubique magnitudines et velocitates supponens, quantas effectus, cujus causa quæritur, postulat.

B. Nihil a physicis, quorum principia, ut geometrarum, proprio arbitrio certa statui non possunt, amplius requirendum est, quam ut causæ rerum tales esse possint. Itaque physica illa Hobbii tamdiu improbanda non est, quamdiu nemo eorundem effectuum per alios motus causas reddiderit probabiliores.

A. Id quod nunquam, credo, fiet. Nam causa naturalis omnis rei est motus aliquis. Ii autem, qui philosophiæ maxime nunc studentes naturam motus minime contemplati sunt, in hanc unam rem incumbunt, ut nova acquirant phænomena; cum phænomena sola experiendo, causæ ratiocinando a motu cognoscendæ sunt.

B. Qui corpora corporibus admovendo nova et mirabilia ostendunt naturæ opera, mirum in modum incendunt animos hominum amore philosophiæ, et ad causas investigandas non parum instigant, eoque nomine laude digni sunt.

A. Ita est; nam historiam naturalem, sine qua scientia naturalis frustra quæritur, locupletant. Sed intueri et admirari naturæ opera, ut puer pulchritudinem libri plus contemplatur quam literas, non est hominis philosophi; id quod faciunt qui videntes phænomena, non considerant quo agente, quo motu, et quo modo generari potuerunt. Nam

si experimenta rerum naturalium scientia dicenda sit, optimi omnium physici sunt pharmacopœi.

B. Cæterum dogmata aliorum de iisdem rebus consideremus paulisper. Luminis quænam est causa efficiens? *Lumen,* dicit aliquis, *est corpus, cujus particulæ, exeuntes e sole, penetrant oculos animalium, unde vident.* Quidni eadem facilitate et veritate dicant etiam tenebras esse corpuscula, quæ exeuntia ab aliquo corpore tenebroso et delata ad oculos, faciunt ut non videant. *Lumen,* dicit alius, et magis accedens ad veritatem, *est inclinatio ad motum.* Sed id quod jam est ad motum inclinatio, quid impedire potest, ne non sit ipse motus? Si quæras quæ sint causæ *rari* et *densi,* dicit alius quod idem corpus, quo plus quantitatis habet, eo rarius, quo minus, eo densius esse. Sed quæris, puto, tu qua de causa, et quo pacto effici potest, ut idem numero corpus, id est, corpus sibi semper æquale, possit habere quantitatem modo minorem, modo majorem.

B. Ego vero id non quæro; scio enim quod est impossibile. Sed corpora videmus modo augeri, modo diminui; quæ tamen eadem esse dicimus.

A. Non autem idem numero corpus esse possunt, nisi idem esse censeas totum et pars. Sed hæc nihil attinent ad *densum* et *rarum.* An putas idem vas, plenum aquæ, majus minusve esse, quam si plenum esset quocunque alio corpore?

B. Minime profecto.

A. Quidam ex philosophis hujus seculi causam *rari* et *densi* explicat hoc modo. Si dato corpori immisceatur quantitatis plus, fit rarum; si minus, densum.

B. Nullus omnino est effectus naturalis, cujus

DIALOGUS VI.

causa non facillime sic expediatur, et eodem modo quo pharmacopolæ temperant sua pharmaca ad præscriptum medicorum. Recipe: corporis puri, ad libitum; gravitatis, gradus octo; quantitatis, paululum; coloris flavi, quantum sufficit. Misce. Fiat aurum. Lepidam narras philosophandi methodum.

A. Et eam quidem philosophiæ reformatæ. Vide jam antiquiorem. Quæritur quænam sit causa, quod magnes ferrum ad se trahit. Respondetur, per συμπαθείαν· Quæritur rursus, quid est συμπαθεία. Respondetur, occulta qualitas. Quæritur etiam, quid est occulta qualitas. Respondetur, quam nescimus. Nonne ad primam interrogationem melius responsum esset, *nescio*?

B. Minime sane. Sic enim visi fuissent, cum jactura aliqua authoritatis suæ, nihilo plus sapere quam vulgus hominum.

A. Ita est. Respexerunt ergo ad utile, deserta honestate.

B. In politica autem, quis unquam ante illum tantum summis imperantibus juris attribuit, ut quicquid illi jusserint, eo ipso quod jusserint, sine injuria esset?

A. Imo vero, quæ civitas unquam extitit, ubi summo imperanti minus juris concessum est? Civitatis Romanæ imperium summum quis jure habuit?

B. Ipsa quidem civitas semper. Civitatis autem munus exequebatur modo unus, modo alius; et post Tarquinium, ante Cæsarem, Senatus Populusque Romanus.

A. Legistin' unquam, quod Romæ pro injuria habitum sit, quod de cive Romano constituisset Senatus Populusque Romanus?

B. Non memini.

A. Cur ergo injuriam nominaremus nos, id quod constitueret Senatus Populusque Anglicanus?

B. Non faceremus: sed quod unus homo vel pars aliqua populi juberet, non dubitaremus aliquando injustum dicere.

A. Quid autem intelligis per *injustum?*

B. Id quod factum est contra leges.

A. Quid sunt leges?

B. Jussa civitatis, id est, jussa curiæ sive cœtus illius, qui a civibus eligitur, ut totam civitatem repræsentet. Non enim pars millesima civium Romanorum potuerunt in Forum convenire.

A. Non ergo ille unus homo, aut pars populi habebat imperium summum.

B. Minime.

A. Nondum ergo ostendisti, injustum esse habitum quod factum est a summo imperante, sed tantum sententiam tuam de forma regiminis summi subindicasti, de qua hoc loco disputare nolo. Dicam tantum, quod est verissimum, si singuli cives representari se jusserint ab uno homine, et per consequens, illius esset imperium summum, id quod ille jusserit non minus pro justo habendum esse, quam si idem jussisset senatus et plebs, eandem habentes authoritatem. Nihil ergo in politica peccavit certe hactenus.

B. Nihil profecto. Sed parturit jam Anglia, et hoc ipso die speratur nascitura Pax et Imperium firmum: quod, nisi *Justitiæ Libra, Gladius Belli,* et *Virga Scholæ* in eadem sint manu, diuturnum esse vix potest.

A. Finem ergo sermonibus nostris tandem imponentes, si placet, surgamus, et precemur Deum,

DIALOGUS VI.

ut illi, qui de imperio Angliæ nunc deliberant, id decernant quod ad ipsius gloriam amplificandam, et ad statum civitatis confirmandum, erit convenientissimum ; maxime vero ut velint imperium in eum locum, unde avulsum est, restituere.

B. Amen.

FINIS.

DIALOGUS PHYSICUS

DE NATURA AERIS,

CONJECTURA SUMPTA AB EXPERIMENTIS NUPER LONDINI HABITIS IN COLLEGIO GRESHAMENSI.

ITEM

DE DUPLICATIONE CUBI.

VIRO CLARISSIMO ET AMICISSIMO

SAMUELI SORBERIO

THOMAS HOBBES

S.D.

INTER varia ludentis naturæ spectacula, doctissime Sorberi, quæ per sphæram vitream concavam exhibuit nuper vir genere et ingenio nobilis in Academia Londinensi, illa in primis cognitione tua digna sunt qæu pertinent ad naturam aeris; adeoque ad artem tuam, in qua excellis, vitæ humanæ, quantum patitur natura, conservandæ. Sphæram hanc una cum tota machina et usu ejus in dialogo sequente, quantum sine pictura potui, descripsi. Inter alia autem ejus miracula scitu digna, commendo tibi hoc, cæteris omissis, unum considerandum: quod animal in eo inclusum, propter mutationem quandam aeris in sphæra in qua includitur factam, valde cito moriatur. Causam mortis plerique esse dicunt, quod aer intra sphæram, quo vivunt animalia omnia quibus sunt pulmones, exuctus sit. Ego contra, neque aerem exugi posse, neque inclusum animal, etsi exuctus esset, tam cito moriturum esse existimo. Actio quidem, quam mors illa sequitur, videri potest vel suctio quædam, et propterea exuctione conclusi aeris interfici animal, respiratione sublata, vel etiam compulsio aeris ab omni parte versus centrum sphæræ

cui animal includitur. Et sic videri potest mori a tenacitate compressi aeris, quasi aqua suffocatum, nimirum, haustum in intima pulmonum aerem solito tenaciorem, inter arteriam et venam pulmonis cursum sanguinis intercipiendo sistere. Sed cur ego, quæ mox lecturus es, anticipo? Nam præjudicare tibi nolo. Sed in re, quæ a corporis humani structura æstimanda est, ad te scribens, adjiciendum hoc putavi de interfectionis modo. Præter experimenta circa naturam aeris, quæ fuere multa, et quæ ad physicam meam confirmandam quasi naturæ consilio quodam oblata diceres, habent et alia ad partes physicæ alias conducentia; ita ut dubitandum non sit quin conventus hii promovendis scientiis plurimum sit profuturus aliquando, id est, cum scientiam motuum veram aut invenerint ipsi, aut meam receperint. Nam conveniant, studia conferant, experimenta faciant quantum volunt, nisi et principiis utantur meis, nihil proficient. *Ignorato* enim *motu ignorari naturam* recte censuit Aristoteles. Si ad scientias sufficeret ingenium, nulla nobis scientia jamdudum defuisset. Nova enim hæc Academia ingeniis abundat excellentissimis. Sed aliud est ingenium, aliud ars. Arte hic opus est. Quæ per motum fiunt, eorum causæ per cognitionem motus investigandæ sunt; quæ cognitio, geometriæ pars nobilissima, hactenus intacta est; nisi quod hanc ego viam illis, qui non ad victoriam conantur, sed ad veritatem, aliquatenus præivi. Sed frustra, ut videtur, dum vivo. Certant enim inter se viventes de ingenio. [Certant mecum politici multi et clerus de jure regio. Certant mecum de geometria arithmeticorum genus quoddam novum, cujus proprium est *unum* sive in lineis sive in quadratis promiscue computare. Certant mecum de physica e Sociis Greshamensibus illi, quibus maxime

creditur, et * sunt quasi reliquorum magistri. Exhibent machinas novas, ut vacuum suum et miras ostendant nugas; quemadmodum faciunt qui circumagunt animalia exotica, spectanda non sine pretio. Hi mihi omnes inimici sunt. Fugere me ex Anglia in Galliam coegit cleri pars una; et rursus fugere e Gallia in Angliam coegit cleri pars alia. Algebristæ convitiantur. "Greshamenses autem," quæres, "quomodo te læserunt?" Scies. Putaram me methodum quandam invenisse interponendi inter duas lineas rectas quascunque duas medias proportionales; methodumque illam scriptam, ipse rure agens, Londinum miseram ad amicum, ut geometris nostris copiam ejus faceret. Contigit postridie ut erroneam esse animadverterem, et ad eundem scripsi palinodiam. Erat unus ex illis, qui vitium idem interea videns, id quod facile factu erat, refutavit. Refutationem hanc in archiva Societatis, etiam ab authore ipso damnatam esse scientes, retulerunt. O præclare factum et generose! Verum ita est, ut sævissime, nec minus dolo quam virtute, de ingeniis certent viventes*.] Morieris ergo, inquies, bono publico. Sic puto, sed non tanto, ut ob eam causam debeam uno minuto temporis citius velle mori. Vivamus quam diu et quam bene possumus; et mutuo amemus. Vale.

---

* Sic Edit. 1668.

† In edit. 1661 non inveniuntur verba uncis inclusa.

AD LECTOREM.

Quisquis es qui Physicam, id est, scientiam causarum naturalium, non in te ipso quæris, sed in libris magistrorum, cavendum tibi est ne aut parum intelligas, aut intellecta non recte supputes. Natura omnia per conflictum agit corporum, motus suos sibi mutuo imprimentium. Itaque in conflictu duorum corporum tam fluidorum quam durorum, si intelligas in utroque corpore qualis fiat motus, id est, qua via et quantus, ad Physicam accedes lector non inidoneus, et motuum causas, recte supputando, invenies saltem probabiles. Cæterum si dictionibus inanibus contentus, videberis tibi intelligere quæ intelligi non possunt, tanto errabis magis, quanto rectius ratiocinabere. In libris physicorum multa occurrunt quæ capi non possunt : qualia sunt quæ dicuntur de rarefactione et condensatione, de substantiis immaterialibus, de essentiis, et alia multa : quæ si conabere explicare verbis illorum, inepte : si tuis, nihil dices. Hæc monitus lege, judica, ignosce. Vale.

DIALOGUS PHYSICUS

DE NATURA AERIS.

ITEM

DE DUPLICATIONE CUBI.

A. Optato te video.

B. Et ego te libenter audio; nam video quidem nihil, ita me clarissimi diei fulgor occæcavit.

A. Asside igitur mihi, donec motus ille organi visorii immodicus resederit.

B. Bene mones. Solet enim, opinor, lassitudo a calore solis hujusmodi caliginem aliquantulum augere. Sed operandi modum, quo tales effectus producit aut lux aut calor, non satis video. Quod omnis non modo sensio, sed etiam omnis mutatio motus aliquis sit in sentiente et mutato, et quod is motus a movente aliquo externo generatus sit, ex quo tempore tu illud nobis primus demonstrasti non amplius dubito. Nam antea omnes fere negabant; quia forte stantes, sedentes, cubantes, tamen sentire se satis intelligebant.

A. Potuerunt, propter eandem causam, dubitare an et sanguis eorum moveretur; nam motum sui sanguinis, nisi quando effunditur, sentit nemo.

B. Et dubitabant quidem ante Harvæum omnes. Nunc autem et sententiam Harvæi veram esse

iidem confitentur, et ad sententiam tuam de motu per quem fit visio, accedere incipiunt. Nam in Societate nostra pauci sunt qui aliter sentiunt.

A. Quænam est illa Societas vestra?

B. Circiter quinquaginta viri philosophi, doctrina et ingenio maxime conspicui, constituerunt inter se singulis septimanis convenire in Collegio Greshamensi ad promovendam philosophiam naturalem. Ubi quantum quisque ad eam rem habet vel experientiæ, vel artis, vel instrumenti, tantum contribuit. Quibus rebus et nova deteguntur phænomena, et rerum naturalium causæ facilius inveniuntur.

A. Cur viros dicis quinquaginta? Nonne potest quilibet alius adesse qui vult, convenientibus, puto, in loco publico; et super visis experimentis suam, æque ac illi, sententiam dicere?

B. Minime.

A. Quo jure prohibebunt? Anne Societas illa constituta est diplomate publico?

B. Non arbitror. Sed locus ubi conveniunt non est publicus.

A. Ergo si domino loci placuerit, ex quinquaginta fient centumviri.

B. Fortasse, sed nobilissimi utilissimique instituti gloria certe et gratia debebitur his primis.

A. Ita certe, si quid invenerint quod sit generi humano, vel patriæ, sive ad defensionem sive ad ornamentum insigniter utile; alioqui contemnentur et illi, et propter illos ipsa philosophia.

B. Sperandum certe est aliquid tale excogitaturos esse hos, aut de scientia naturali ulterius desperandum. Cæterum conantium, quanquam frustra, laudanda est voluntas.

A. Recte dicis, modo voluntas ea ad scientias ipsas, non ad ingenii gloriam dirigatur. Sed dic quæso, in causis rerum investigandis quam sequimini methodum?

B. Proferuntur primo experimenta, deinde alio die, quam quisque causam phænomeni esse suspicatur, eam viva voce, ut potest, explicat. Nam historiæ naturali scriptæ non satis fidimus; neque si certissimæ essent, satis inservire possent instituto nostro, nudæ existentes circumstantiarum, quæ ad causas naturales inveniendas sunt necessariæ.

A. Rectum quidem illud est, de non temere credenda historia. Sed an etiam ea phænomena quæ unoquoque fere die unusquisque vestrum videre potest, suspecta sunt, nisi illa omnes simul videatis? Aut ea quæ videtis in conclavi experimenta, quæ sane pauca esse constat, satis esse creditis; ea autem, quæ vobis quotidie ostentant cœlum altum, pontusque et lato pectore tellus, satis esse non putatis?

B. Sunt enim naturæ opera quædam critica, non nisi arte et diligentia nobis cognita; in quorum uno aliquo naturæ, ut ita dicam, artificium, id est, modus operandi manifestius se prodit, quam in centies mille phænomenis istis quotidianis. Talia autem sunt experimenta nostra, quorum unius causa inventa ad numerum infinitum aptari potest phænomenωn communium.

A. Quænam sunt illa? Sed prius audire cupio, quinam sint illi homines docti qui vestram constituunt Academiam. Nam Academias appellant societates ejusmodi Galli Italique. Talem aiunt esse Parisiis hodie in domo domini Mommori. Et cum ego eram Parisiis, conventum habuimus non

multum dissimilem in cœnobio Minimorum, quanquam nec certus numerus, nec diebus præstitutis conveniebamus, apud virum optimum et bonarum artium promotorem insignem, F. Marinum Mersennum, qui inventa nostra publicavit in libro, quem inscripsit *Cogitata Physico-Mathematica.* Nam ut quis problema aliquod demonstrasset, ad illum ferebat, ab illo et cæteris examinandum. Sic vos quoque, puto, facitis.

B. Minime, sed ut dixi, viva voce. Quod quæris quinam sunt, paucos illos, quos in eo numero vel facie vel scriptis tu nosti, nominabo; cæteros non est necesse. Ibi est C.

A. Novi hominem. Probus est, subtilis, et ingeniosus.

B. Et D.

A. Non carebitis ergo historia naturali.

B. Sunt quoque assidui E, F, G.

A. Numerus sunt.

B. Et H, I, K.

A. Non placent inter physicos algebristæ. Narra mihi nunc experimenta illa vestra critica.

B. Primum est de vacuo et natura aeris, per machinam quandam, quam vereor ut possim tibi verbis satis perspicue describere; nam pictam non habeo. Est vas quoddam vitreum, sphæricum, concavum, magnitudinis ut capiat circiter quinquaginta aquæ sextarios, quod appellant *Recipiens.* Hujus fundo immissus est tubulus cavus, rectus, prominens extra recipiens, cum clavicula, per quam transitus aeri vel prohibetur vel conceditur prout volumus. Recipienti adjungitur inferne vas æneum, cylindricum, cavum, longum pollices quatuordecim, cujus cavitatis diameter est tres pollices. Cylindri sum-

mitas perforata est ad latus, oblique, ut quando opus erit occludi et recludi possit. Partem perforatam appellant *valvulam.* In cavitatem hujus vasis cylindrici, ab una parte inseritur pars tubi, quæ prominet e recipiente: ab altera parte adigitur cylindrus solidus ex ligno, qui corio tectus ita exacte, ad ingressum aeris prohibendum, cylindri cavitatem exæquat, ut intrudi et retrahi nisi satis magna vi non possit. Cylindrus hic solidus vocatur *Suctor*, quippe qui adhibetur ad aerem e recipiente exugendum. Intellextin'?

A. Ita. Ex duobus vasibus concavis, altero vitreo, sphærico, altero æneo, cylindrico, fit vas unum concavum; in cujus commissura transitus aeri ad libitum permittitur vel negatur: et valvula est, per quam aer e vase inferiore, nempe cylindrico, emitti potest, quando opus erit, in apertum cœlum.

B. Tenes. Suctorem autem, quia vis requiritur, machinula quadam, quali utimur ad tensionem balistarum, ferrea, dentata, in cylindrum impellunt revelluntque. Est præterea in recipiente summo orificium satis amplum, una cum operculo et clavicula, quibus ad aerem ambientem admittendum vel excludendum aperiri et claudi potest. Imaginare jam, transitu inter recipiens et cylindrum æneum non impedito, suctorem usque ad summitatem cylindri adigi; deinde transitu aeri, versa clavicula, occluso, suctorem aliquantulum retrahi. Quid putas inde sequuturum? Nonne relictus a suctore locus erit vacuus? Unde enim nisi a recipiente repleretur, cum transitum ambienti aeri neget suctor, cylindri concavum exacte implens?

A. Neque unde repleri potest, nec quid sequuturum sit sciri posse puto, nisi natura aeris sit ante

cognita. Ideoque vereor ne ex suppositis quibusdam aeris proprietatibus concludant spatium, quod a suctore retracto relinquitur, esse vacuum; et ab eo rursus, quod spatium illud est vacuum, talem probare velint esse naturam aeris qualem supposuerant: id est, ne demonstrent sine principio demonstrationis.

B. Qualem autem aeris naturam imaginaris tu, qua supposita, spatium illud repleri potest?

A. Egone? Suppono aerem fluidum, id est, facile divisibilem in partes semper fluidas semperque aerem, eo modo quo omne quantum divisibile est in semper quanta. Nec suppono tantum, sed credo quoque, modo aerem intelligamus ab omni* terræ aquæque effluviis purum, qualis putatur esse æther. Neque est qui hactenus ullam adduxit rationem, quare ita esse non potest. Contra vero, si pars aeris, quanta est minima quam vidisti unquam gutta aquæ, fluida est, quomodo tibi probaturus† est aliquid quod pars dimidia ejus partis, vel, si vis, centies millies millesima, non sit ejusdem naturæ, nempe fluida et aer, aer inquam purus?

B. Sed plerique nostrum naturam fluidam a non fluida distinguimus magnitudine partium ex quibus corpus aliquod constat, et quasi compingitur. Itaque non modo aerem, aquam, et liquorem omnem, sed etiam cinerem et pulverem tanquam fluida contemplamur. Et fluida ex non fluidis composita esse posse non negamus. Nam divisibilitatem illam infinitam non concoquimus.

A. Divisio quidem infinita concipi non potest, divisibilitas autem facile. Ego, contra, distinctio-

---

* Sic Edit. 1661 et 1688. † Sic Edit. 1668.

nem non capio inter fluida et non fluida, quam sumitis a magnitudine partium; nam si caperem, ruina illa, sive rudera illa, quæ jacent in ecclesia Paulina, mihi dicenda essent fluida. Sin propter nimiam lapidum magnitudinem fluida illa esse negaveritis, defini mihi magnitudinem illam, quam habens pars ruentis muri, propter eam sit dicenda fluida. Tu vero, qui divisibilitatem infinitam non capis, dic mihi quæ tibi apparet causa, quare Deo omnipotenti difficilius esse putem creare corpus fluidum, et cujus partes actu diffluant, omni data atomo minus, quam creare oceanum. Itaque desperare me facis omnem conventus vestri fructum, dicendo quod putant aerem, aquam, et cætera fluida constare ex non fluidis: tanquam si murum, cujus ruentes lapides aliquousque discurrent, dicerent esse fluidum. Si sic loquendum est, nihil non est fluidum. Nam etiam marmor comminui potest in partes omni atomo Epicureana minores.

B. Si tibi id concessero, quid sequitur?

A. Sequitur hoc, ut non necesse sit locum, qui a suctore revulso relictus est, esse vacuum. Nam dum suctor retrahitur, quanto relictus locus major fit, tanto minus loci relinquitur aeri externo, qui retrusus a suctore moto versus externa, proximum sibi aerem similiter movet, et hic alium, et sic continue: ita ut necesse sit aerem tandem compelli in locum desertum a suctore, et intrare inter superficiem suctoris convexam et cylindri concavam. Supposito enim aeris partes esse infinite subtiles, impossibile est ut via illa, qua retrahitur suctor, illæ non se insinuent. Primo enim, contactus superficierum istarum per omnia puncta perfectus esse non potest, quia ipsæ superficies fieri infinite

læves non possunt. Deinde, vis illa, quæ ad suctorem revellendum adhibetur, cavitatem cylindri aliquantulum distendit. Postremo, si in confinio duarum dictarum superficierum ingrediatur una tantum atomus dura, aer purus ea via ingredietur, conatu quantumvis debili. Poteram etiam computasse aerem illum, qui propter eandem causam insinuasset se per cylindri valvulam. Sublatam ergo vides consequentiam a retractione suctoris ad locum vacuum. Sequuturum hoc quoque est, aerem illum, qui est in locum a suctore desertum impulsus, quia magna vi impulsus est, motu valde celeri et per circuitum inter summum et imum in cylindro moveri; cum nondum sit quod motum ejus possit debilitare. Scis autem nihil esse quod sibi motum aut impertiri possit, aut diminuere.

B. Esto locus ille relictus plenus, ut dicis, aere puro, id est, ego interpretor, corpore æthereo. Quid jam, si versa clavicula transitus detur aeri e recipiente in subjectum cylindrum, eventurum putas?

A. Permistum iri puto aerem utrumque, et motu eodem circumferri in utroque vase, celeri quidem, sed tanto temperatiore quam ante, quanto idem motus majori quantitati aeris communicatur.

B. Observavimus autem, versa clavicula, sonitum fieri quasi aeris e recipiente in cylindrum irrumpentis.

A. Mirum hoc non est, propter aeris in cylindro cum aere recipientis collisionem. Sed quomodo hæc explicatis vos?

B. Duplici modo. Primo et potiori, sic. Supponimus aeri, in quo vivimus, inesse vim elasticam, id est, aerem partibus constare vel saltem abundare

ea natura præditis, ut pondere incumbentis atmosphæræ compressæ conentur quantum possunt contranitendo simulatque corpuscula illa removentur, vel quacunque de causa cedunt, sese a compressione liberare. Intelligetur autem melius id quod dicimus, si concipias aerem hunc prope terram quasi cumulum esse corpusculorum, quæ alia aliis superjacentia lanam referunt, cujus pili exiles et flexibiles veluti totidem elastra tum facile flecti et convolvi possunt, tum etiam perpetuo conantur sese extendere et restituere. Veluti si quis lanam manu undiquaque comprimeret, unumquodque tamen filum ejus potentia sive principio præditum est sui dilatativo, cujus virtute, laxata manu, lana spontaneo motu se distendit et restituit. Atque per partium aeris vim hanc elasticam, plurimorum circa vacuum et naturam aeris phænomenων non est difficilis explicatio. Alter modus est —

A. Differatur paululum ille alter modus. Interea quæro a te, nonne omnis hypotheseos lex hæc est, ut quæ supponuntur omnia debeant esse sua natura possibilia, id est, cogitabilia?

B. Omnino. Et quæ hic supponitur vis, qua pressa se restituunt, facile quidem cum in multis rebus conspici, tum in aere concipi facillime potest.

A. Hoc quidem verum est. Nam videmus laminam chalybeam balistæ tensæ, per vim illam sive principium restitutionis, simul ac sublatum est impedimentum, velocissimo motu redire ad consuetam rectitudinem. Credere tamen non possum philosophum fuisse illum, qui balistæ, aut arcus, aut cujuscunque machinæ elasticæ, experimentum exhibuit primus. Philosophi est talium rerum causas vel veras, vel saltem probabiles invenire. Quam

autem lanæ compressæ, vel laminæ chalybeæ, vel atomi aereæ restitutionis causam afferunt philosophi vestri experimentarii? Vel tu quam causam affers verisimilem, propter quam balistæ lamina chalybea consuetam rectitudinem tam cito recipit?

B. Causam ejus rei certissimam non possum dicere. Quod in causa non sit remotio impedimenti, certe scio; quia causa motus omnis consistit in actione aliqua in corpus movendum. Rursus, remoto impedimento non credo laminam resilire impulsam ab ambiente aere, neque a pondere ullo atmosphæræ; cum aer ille contiguus comprimi a tensione balistæ non possit; et si posset, etiam lamina plumbea idem pateretur. Porro quod lamina illa moveatur sponte sua, id est, ut ipsa sui ipsius motus sit principium, impossibile est; et ne a nostris quidem concedetur. Quid ergo restat, nisi ut conatus ille ad rectitudinem sit ipse verus motus localis, sed intra spatium imperceptibile, velocissimus tamen, ut qui velocissimum motum procreat?

A. Recte loqueris, et theorema mirabile facili methodo, ut philosophum decet, perfecte demonstrasti. Quæro autem in corpore quod conatur ad sui restitutionem, qualis sit partium motus?

B. Motus ille rectus esse non potest; quia si rectus esset, totum corpus, (verbi gratia) ipsa balista eo motu absportaretur, eo modo quo absportari solet telum. Necesse ergo est ut conatus ille sit circularis, talis, ut omne corporis se restituentis punctum faciat circellum.

A. Id vero necesse non est; sed ut motus talis sit, ut eo id quod movetur redeat ad locum unde moveri cœpit, id profecto necessarium est. Sed

causa, quare filum laneum post compressionem se extendit, quænam est?

B. Quanquam causam tibi veram dicerem, tu tamen veritati non acquiesceres, sed ulterius me interrogabis quænam hujus sit causæ causa; unde ibitur in infinitum.

A. Minime vero. Nam ubi ad causam veneris aliquam æternam, ibi te interrogare desinam. Dic ergo, particularum, quæ constituunt naturam chalybeam, vel laneam, vel aeream, motum illum quænam causa efficere potest?

B. Respondeo tibi, particularum illarum aeris, quas filis laneis comparavi, particulæ adhuc minores motum illum restitutionis efficiunt per motum suum proprium naturalem reditionis in se, cujus principium est nullum.

A. Partes ergo corpusculi omnis aerei movebantur seorsim motu illo in se redeunte, antequam corpusculum illud ex illis minoribus componeretur.

B. Fieri aliter non potest.

A. Etiamne sic sentiunt tui socii?

B. Unus fortasse aut alter; cæteri non item.

A. Credo. Nam motus hic restitutionis Hobbii est, et ab illo primo et solo explicatus in libro DE CORPORE, cap. xxi, art. 1. Sine qua hypothesi, quantuscunque labor, ars, sumptus ad rerum naturalium invisibiles causas inveniendas adhibeatur, frustra erit. Vidisti autem jam elastrum illud aeris, quod supponunt, aut impossibile esse, aut recurrendum esse ad hypothesim Hobbianam, quam, fortasse non intelligentes, rejecerunt.

B. Nescio quid ad hæc respondendum sit. Sed si tu per hanc hypothesim tuam cætera hujus machinæ phænomena expedieris tam clare, quam illi

fecerunt per suppositam gravitatem atmosphæræ, tuam ego veram esse existimabo. Sed habent quoque hypothesim aliam, qua phænomena eadem salvari posse putant, Cartesianam. Visum Cartesio est aerem nihil aliud esse præter congeriem corpusculorum magnitudine et figura variis flexibilibus præditorum, a calore, præsertim solis, a terra et aqua elevatorum, et in materia ætherea illa, quæ tellurem undiquaque circumfluit, natantium: illa autem corpuscula ab indesinente motu materiæ illius æthereæ ita moveri et in gyrum verti, ut extensa et circulariter mota, cætera omnia a se repellant: eadem autem motum illum gyrationis frigefacta amittere, et reddi flaccida.

A. Memini quidem Cartesium hoc dixisse de natura aquæ, cujus partes anguillis comparavit. Sed naturam aeris, si bene memini, similem esse dicit virgultis arborum. Sed quisquis talis suppositionis author fuit, parum refert. Nam ipsa hypothesis, in qua motus supponitur materiæ subtilis sine causa velocissimus, et præterea corpusculorum innumerabiles vertigines diversæ ab illius materiæ unico motu generatæ, vix sani hominis est. Sed redeamus ad hypothesim priorem, ubi aeri tribuitis gravitatem. Primo, explicandum esset quid sit *gravitas*. Quod gravitas est conatus ab omni loco ad centrum terræ, sciunt omnes. Conatus autem motus est, quanquam imperceptibilis. Cujus conatus sive motus imperceptibilis causam efficientem quibus machinis investigatis? Nam id primo quærendum erat; deinde, quomodo a gravitate atmosphæræ phænomena machinæ vestræ salvari possent. Quod atmosphæræ insunt permistæ corpori æthereo multæ tum aquæ tum etiam terræ parti-

culæ, facile persuadeor. Sed quod in medio æthere sursum, deorsum, quaquaversum motæ, nec semper alteræ alteris innitentes, gravitent, inconceptibile est. Ligna et corpora cætera aqua leviora, ponderi tamen totius addunt aliquid, quia utrumque corpus grave est. At in ætherea substantia, quæ gravis non est, nisi dum subsidunt, gravitare non possunt. Quomodo enim, dum non subsidunt, si gravitas conatus sit deorsum, dicentur gravitare, aut aerem comprimere quanquam laneum?

B. Indigent hæc meditatione majore, quam ut subito assentiar. Verum pergamus ad experimenta nostra, ut videamus an causæ earum reddi possint per suppositiones tuas? Et primo —

A. Primo, ipsas tibi suppositiones debeo proponere et, ut eas intelligas, explicare. Nosti a Copernico introductam esse hypothesim hanc, nempe terram motu annuo circumagi circa solem, ita ut axis ejus semper sibi feratur parallelωs. Quod autem de axe dixit, verum quoque est de omni alia linea recta in corpore telluris considerata.

B. Scio hoc, atque hypothesim illam pro vera haberi hodie a doctis fere omnibus.

A. Motum hunc appellat Hobbius *circularem simplicem*, quia omne punctum terræ, dum tota facit suum circulum, describit (ut ab eo demonstratum est libro DE CORPORE, cap. ii. art. 1) suum quoque circulum. Eodem capite, art. 10, ostendit a motu circulari simplice motum generari etiam *circularem simplicem*. Itaque cum ab iisdem doctis causa motus annui putatur esse sol, talem quoque motum ascribit soli. Et his quidem hypothesibus non ad hæc, sed ad alia phænomena sal-

vanda utitur. Sed de vacuo dicturus et natura aeris, aliam assumit hypothesim, hanc, quod terra motum sibi proprium habet, ab ipsa natura sive creatione acceptum, etiam *circularem simplicem.* Et per suppositionem hanc multa de causis naturalibus perspicue demonstrat; eam autem qualis sit, sic intelliges. Sume tibi in manus pelvem, in cujus fundo sit aliquantulum aquæ: quantulumcunque, modo visibile. Nonne potes tu aquulam illam, pelvem movendo, ita movere, ut circum currat, elevans se, circa pelvis superficiem concavam?

B. Possum, et facillime. Nam pelvem utraque manu comprensam agitabo circulariter; sed ut circulos faciat valde parvos, ne aqua exiliat. Quod cum faciam, aqua, quæ in fundo erat, sine dubio exurget, et per superficiem pelvis concavam circumfluet.

A. Sed motus illius circularis, quia moturum te dicis pelvem utraque manu circulariter, ubi erit centrum?

B. Centrum? Inexpectatum hoc dicis. Respondeo tamen, centra sunt, non unum, sed plura; tot credo quot possunt in corpore pelvis considerari puncta, et (quod sequitur) totidem circelli, iique inter se æquales.

A. Descripsisti ergo motum illum, quem vocat Hobbius *circularem simplicem;* nisi quod per *circularem* intelligit ille motum in se redeuntem quemlibet.

B. Sic intelligo quoque ego. Nihil est conceptu facilius. Supponatur ergo, ut jubes, talem esse telluris motum *circularem simplicem,* naturæ* ipsius congenitum.

---

* Sic Edit. 1668.

A. Quod si per omnipotentiam divinam annihilatum, vel procul in alium locum ultra stellas fixas translatum esset telluris hujus dimidium, nonne credis partem reliquam eundem motum retenturam?

B. Credo, et (quia video quo tendis) dico præterea, etsi unica ejus atomus hic relinqueretur, quod etiam illa atomus eodem moveretur motu *circulari simplice.*

A. Particulæ ergo illæ terreæ aqueæque, quæ aeri nostro interspersæ vestram faciunt atmosphæram, eundem habent illum motum *circularem simplicem* congenitum.

B. Necessario sequitur.

A. Siquidem autem sol, sive præcipue sive solus, particulas illas a terra elevat, ut vestri credunt, et cum illis ego; mihi quidem non incredibile videbitur, quanto aer proprior terræ est, tanto illum partibus terreis esse pleniorem.

B. Dubium non est.

A. Intellexti ergo hypotheses meas: primam, quod aeri interspersæ sunt particulæ multæ terreæ, præditæ motu circulari simplice naturæ suæ congenito: secundam, quod major est quantitas earum particularum in aere prope ad terram, quam in aere a terra remotiore.

B. Sunt quidem hypotheses haud absurdæ. Restat ut ostendas eorum usum ad salvanda phænomena quæ nunc dicturus sum. Primo, quoniam vidi, recipiente, ut nos loquimur, pæne exhausto, vel, ut tu vis, suctione sæpe repetita, manubrium, quod forte manibus ejus qui suctorem revellebat elapsum*, retro ferri versus cylindri summitatem:

---

* Deest *est* in edit. 1661 et 1668.

explica ergo primo per hypotheses tuas, si potes, quare id sit necessarium.

A. Quoniam per suctoris retractionem aer purus impulsus erat, partes autem terreæ impulsæ non erant, major erat ratio particularum terrearum, quæ extra cylindrum suctori contiguæ erant, ad aerem purum, in quo motum suum exercebant, post revulsionem quam ante. Quare particulæ illæ motæ, minus habentes loci ad motum suum naturalem exercendum, aliæ aliis impingebant, et propellebant. Necesse ergo erat ut particulæ, quæ suctoris superficiei contiguæ erant, suctorem propellerent. Quod est ipsum phænomenon. Hoc autem connotandum est, quod a surgente suctore aer qui erat intra cylindrum, eadem via, qua intravit, exprimeretur.

B. Fieri quidem ita posse facile video; neque illic quicquam video mirabile præter ipsam hypothesim. Quam tamen minus aliquanto mirabilem esse fateor, quam est suppositio nostra de aeris vi elastica.

A. Ut operum naturæ mirabilium causæ quoque sint mirabiles, a ratione alienum non est; neque hominis philosophi esse censeo, corporum quorundam, ut solis et stellarum, mirabiles supponere magnitudines, contra vero mirabiles exiguitates non admittere: cum virtutis ejusdem infinitæ sit utraque creare, tam maxima quam minima; et mirandorum effectuum causas reddere sine mirandis hypothesibus, sit impossibile. Hypothesim legitimam faciunt duæ res; quaram prima est, ut sit conceptibilis, id est, non absurda; altera, ut ab ea concessa inferri possit phænomeni necessitas. Harum prima caret hypothesis vestra; nisi

forte concedamus, quod concedendum non est, moveri posse aliquid a seipso. Supponitis enim aeris particulam, quæ certe dum premitur quiescit, ad sui restitutionem moveri, nullam assignantes talis motus causam, præter illam ipsam particulam.

B. Nosti experimentum illud de vacuo Torricellianum. Cylindrum cavum, vitreum, ab una parte accurate clausum, ab altera parte apertum, repletum argento vivo invertunt immerguntque in vas apertum, in quo vase continetur etiam argenti vivi quantum opus est ad os cylindri contegendum. Itaque argentum vivum descendit e cylindro in subjectum vas. Nonne ergo spatium, quod in cylindro ab argento vivo deseritur, remanebit vacuum?

A. Non est necesse. Si in fundum usque maris vesica detrudatur plena aeris, atque illic rupta exitum præberet aeri; putasne aerem illum, jam liberum, in fundo maris mansurum, an potius ascensurum esse ad superficiem aquæ?

B. Ascendet profecto manifeste ebulliens.

A. Quare autem? Noli mihi nunc sic respondere, nempe accidere hoc, quia minus est aer quam aqua gravis: sed ostende a quo motore, per corpus aquæ, minus mobile quam est ipse aer, penetrans, istuc fertur.

B. Aqua deorsum conatur multo magis quam aer. Necesse ergo est, ut mihi saltem videtur, ut aqua per conatum quem habet ad centrum terræ, majorem quam habet aer, aerem premat, et aer pressus fundum premat, et fundus pressus aerem repercutiat, tanto conatu ut aquam dimovens necessario emergat.

A. Quid si in vase clauso aqua inferior existens, versus aerem, super ipsum existentem, supponatur

ascendere eodem conatu quo tendit naturaliter deorsum, quid fieret?

B. Aer, rursus aquam penetrans, locum in cylindro capesseret inferiorem.

A. Cur autem idem non contingeret, si pro aqua poneremus in cylindro argentum vivum?

B. Continget idem.

A. Cogita jam in experimento Torricelliano, argentum vivum descendere in subjectum vas, continens etiam argentum vivum; argentum autem vivum quod in vase est, ascendere eodem conatu quo descendit in cylindro, et premere ascendendo superjacentem aerem, qui aer, (supposito universum mundum esse plenum), pressionem surgentis argenti vivi effugere non magis potest, quam si ambo corpora conclusa essent in uno et eodem cylindro. Quare necessarium est ut aer penetret ipsum corpus argenti vivi, vel transeat inter superficiem argenti vivi convexam et cylindri concavam. Vides igitur hujus phænomeni rationem reddi posse sine suppositione vacui, vel elastri, vel motus circularis simplicis atomorum.

B. Si quod* revera aeris pondus sit, vel si talis motus sit particularum terrearum qualem tu supponis, nihilne conferunt ad ascensum et descensum argenti vivi in cylindro?

A. Etiam conferunt; nimirum, ut argentum vivum aliquantulo minus descendat, quam si aer externus esset purus et sine pondere.

B. Scimus quod ad altissimi montis radicem argentum vivum, quod est in cylindro, magis subsidit quam in monte summo.

---

* Sic Edit. 1661 et 1668.

A. Sed et particulæ illæ, quæ interspersæ aeri ita moventur ut supposuimus, magis confertæ sunt ad radicem montis quam in summo. Nam hoc quoque supposuimus.

B. In vas apertum infudimus aquam; in aqua fistulam statuimus erectam, longam, exilissimam. Observavimus autem aquam e vase subjecto in erectam fistulam ascendisse.

A. Nec mirum. Nam superficiem aquæ particulæ aeri interspersæ aquæque contiguæ, motu suo verberabant; ita ut aqua non potuit in fistulam non ascendere, et sensibiliter quidem in fistulam valde angustam.

B. Revertor ad phænomena machinæ nostræ. Si quis post impulsionem revulsionemque suctoris aliquoties repetitam, epistomium superni orificii recipientis conetur extrahere, inveniet illud valde gravitare, tanquam si multarum librarum pondus ab eo penderet. Unde contingit hoc?

A. Ab aeris, qui est in recipiente, fortissimo conatu circulari, facto a violento ingressu aeris inter superficiem suctoris convexam et cylindri concavam, generato per iteratam illam impulsionem revulsionemque suctoris, quam vos perperam vocatis exuctionem aeris. Nam propter naturæ plenitudinem, epistomium extrahi non potest, quin aer, qui est in recipiente epistomio contiguus, una extrahendus sit. Qui quidem aer si quiesceret, facillime epistomium sequeretur. Sed dum velocissime circuit, satis difficulter sequitur, id est, videtur esse valde gravis.

B. Verisimile est. Nam ut aer novus in recipiens paulatim admittitur, etiam apparentem illam gravitatem paulatim perdit. Vidimus item aquam

demissam in recipiens, post suctoris aliquot reciprocationes ita bullire, ac si supposito igne fervesceret.

A. Id quoque accidit propter velocitatem aeris, ut dictum est, in recipiente circumeuntis; nisi forte aquam illam, dum bullit, calidam quoque esse deprehendatis. Nam si certi essemus illam plus calescere, alia causa phænomeni excogitanda esset.

B. Imo, certi sumus quod non plus calescit sensibiliter.

A. Quid ergo tali aquæ motui conferre posse putas majorem vel minorem atmosphæræ gravitatem?

B. Neque illum motum attribuunt, puto, atmosphæræ.

A. Ab hoc experimento manifestum est, quod recipiens per exuctionem hanc, quam vocatis aeris, non fit vacuum. Nam moveri aqua non potuit nisi a movente aliquo moto et contiguo. Itaque phænomenum hoc demonstrationem suppositionis meæ continere videtur non infirmam. Præterea, dic mihi, bullientem aquam potuistin' conspicere?

B. Quid ni?

A. Nonne visionem fieri concedunt vestri, per actionem continuam ab objecto ad oculum? Nonne etiam putant actionem omnem esse motum, et omnem motum esse corporis? Quomodo ergo potuit ab objecto, nempe aqua, ad oculos tuos motus per vacuum, id est per non-corpus, derivari?

B. Non affirmant nostri ita vacuum esse recipiens, ut nullus omnino aer relictus sit.

A. Nil refert an totum recipiens vacuum sit, an magna ejus pars. Nam utrumvis supponatur, derivatio motus ab objecto ad oculum intercipietur.

B. Ita videtur; nec habeo quod respondeam. Pergo igitur ad experimenta. Per eandem reciprocantis suctoris operam, etiam animalia, si in recipiente concludantur, tamquam exucto aere intra duo vel tria minuta horæ morientur: quod, concesso vacuo, mirandum non est; negato, nescio quomodo evenire potest.

A. Credin' tu animalia ista tam cito interempta esse, eo quod carerent aere? Quomodo ergo sub aquam vivunt urinatores, quorum aliqui, assueti a pueritia, caruere aere per horam integram? Inclusa in recipiente animalia occidit motus ille idem vehementissimus, quo distenduntur rumpunturque inclusæ vesicæ.

B. Discedo iterum a machina, et causam quæro noti omnibus experimenti. Si quis phialæ, omni corpore præter aerem vacuæ, os apertum labiis undique arcte complectens, aerem intus contentum conetur exugere, primo, labra inde difficulter revelli sentiet; deinde, si phialæ inversæ os in aquam quantulamcunque immergat, videbit aquam in phialam ascendere altius quam est subjectæ aquæ superficies. Quæro cur aqua contra naturam suam ascendit, præterquam ut spatium impleat, quod in phiala factum erat, sugendo, vacuum?

A. Vacui fuga causa rei esse non potest. Si aerem exuxisset, aut aer alius, dum phialam a labiis ad aquam transferrebat, ingressus esset; aut postquam transtulisset, aqua ingressa non esset. Facilius enim ascendit aqua quam aer. Quid ergo effecit ut aqua ascenderet? Conatus aeris ad exitum e phiala. Quod sic intelliges. Qui phialam sugit, nihil ad pulmones attrahit, ut faciunt qui respirant, neque in ventriculum deglutit, uti infans

qui matris sugit ubera. Exucto ergo aeri quis locus est quo se recipiat? Nullus. Non ergo exugitur. Suctio ergo nihilne, inquies, agit? Imo multum. Nam ab illa fit, primo, ut labra sugentis ad collum phialæ ita arcte adhereant, ut non facile divellantur, incipiente disjunctione ab ambitu contactus exteriore. Secundo, fit sugendo, ut aer qui est intra phialam, conetur per eam partem exire, ubi suctionis est initium, hoc est, per phialæ os. Itaque ore phialæ quantulumcunque in aquam immerso, si conatus aeris quem habet a suctione, major sit quam vis qua aqua gravitat, necessarium est, ut aer aquam penetrans exeat, et in locum ejus ascendat aqua, donec vi suctionis decrescente, conatus aeris ad exeundum, et aquæ ad subsidendum, fiant æquales.

B. Nihil probabilius. Dic mihi nunc, quam causam habet vis illa admirabilis, qua pilæ plumbeæ, vel etiam sagittæ, emittuntur e fistulis illis quas appellant sclopetos ventaneos; quorum fabricam nemo fere nescit eorum qui conversari solent cum philosophis.

A. Sclopetus ventaneus, ut et machina vestra, duos habet ventres et suctorem. Machina vestra foramen habet cum clavicula in ventrium commissura; sed sclopetus hic in commissura ventrium foramen habet cum valvula, quam aer a suctore incussus facile aperiens, intrat in ventrem ulteriorem, et pro maxima vi qua incussus fuerat exitum tentans circumcurrit, donec ope lingulæ dato exitu, per ventris ulterioris fundum erumpat, tanta vi quantam multi et validi ictus suctoris conferunt. Itaque mirum non est, si pilam exitui oppositam per satis longum spatium ejiciat.

B. Sed quomodo possunt ictus illi satis fortes esse ad aerem incutiendum, cum suctor talis esse debeat ut ventrem anteriorem adæquate impleat?

A. Est in suctore ipso, ut nosti, foramen cum valvula, quæ valvula, dum retrahitur suctor, ab aere externo facile aperitur. At dum impellitur, aperitur illa valvula quæ est in ventrium amborum commissura.

B. Memini ita esse. Nec dubito quin effectus illius veram unicamque causam reddidisti, eandemque quæ mirabiles illos in machina nostra excitavit motus aeris. Quam autem illius effectus causam nostri reddunt vel reddituri sunt nescio. Redeo rursus ad experimenta machinæ nostræ. Appendunt in bilance ad unum libræ brachium vesicam inflatam; ad alterum, plumbi tantum ut fiat æquilibrium: et demittunt in recipiens ita ut pendeat ab operculo. Vidimus autem, exucto aere, præponderare vesicam. Ponderatur ergo aer in loco vacuo, et per consequens a præponderatione vesicæ concludunt gravitatem ejus esse aliquam. Etiam quanta illa est, aliquatenus intelligunt.

A. Quod quidem lanx, in qua est vesica, magis deprimitur quam altera, certi esse possunt, oculis testibus. Quod autem id a gravitate aeris naturali accidit, certi esse non possunt; præsertim si quæ sit gravitatis causa efficiens, nesciunt. Causam autem gravitatis quamnam assignant?

B. Nullam adhuc, sed per experimentum ipsum illam quærunt. Quoniam autem vesica, etsi non præponderat, propendit tamen, ostende propter quam causam propendit.

A. Quod vesica, sive follibus sive flatu oris distenta sit, gravior sit quam eadem vesica non

distenta, negare nolo, propter majorem quantitatem atomorum follibus, vel corpusculorum fuligineorum ab halitu, inflatorum. Ab experimento autem, quod fit a vesica inflata, nihil colligunt quod sit satis certum. Oportuit lancibus imponere duo vasa pondere æqualia, quorum alterum esset accurate clausum, alterum apertum. Sic enim non inflatus, sed inclusus tantum, aer ponderatus esset. Quando igitur aerem sic ponderatum videbis, meditabimur postea quid dicendum sit de phænomeno quod retuleris. Quod attinet ad causam gravitatis, mihi quidem nihil videtur verisimilius, quam quod causa illa quæ potuit a principio homogenea compellere et heterogenea dissipare, eadem nunc potest homogenea, dissipata per violentiam, iterum congregare, et heterogenea vi compulsa disjicere. Motus autem, qui id potest, alius esse non potest præter motum illum circularem simplicem, quem definivit Hobbius, libro DE CORPORE, cap. XV, appellatque alicubi *fermentationem*, et de eo proprietatem hanc demonstrat, quod congregat homogenea et heterogenea dissipat. Motus autem hujus initium in sole esse supponit.

B. Placet mihi tua magis hypothesis, quam illa de vi aeris elastica. Nam video quod a veritate illius, veritas dependeat vel vacui vel pleni; sed a veritate hujus, nihil sequitur in neutram partem quæstionis. Aeris, inquit, structura similis est compressæ lanæ. Bene est. Lana fit ex filis. Recte. Sed cujus figuræ? Si parallelopipedi, nulla potest esse compressio partium: si non parallelopipedi, erunt inter fila illa spatia quædam relicta; quæ si vacua sunt, supponunt vacuum, ad probandum quod vacuum est possibile; si plena,

plenum dicunt quod vacuum putant. Procedo jam ad experimenta alia, et referam, primo, ea quæ igni accidunt incluso in recipiente. Candelam ardentem immissam in recipiens, et in medio ejus pendentem, postquam, clauso ejus orificio, cœptum est suctorem reciprocare, intra spatium semi-minuti horæ vidimus extinctam.

A. Candelam ardentem demissam in fodinam, unde effodiunt carbones terreos, quanquam fodina neque clausa erat neque obscura, sed ut in aquula quæ in fundo erat tamquam in speculo videretur cœlum, tamen sine ullius suctoris opera candelam, inquam, antequam pervenit ad mediam altitudinem fodinæ, intra spatium semi-minuti horæ vidi extinctam.

B. Carbones ligneos bene accensos demissos, ut diximus, in recipiens, ab initio suctionis vidimus statim languescere, et post spatium trium minutorum non potuisse ignem amplius videri.

A. Carbones terreos bene accensos, demissos, ut modo dixi, in eandem fodinam, vidi primo languescere, deinde intra spatium trium vel quatuor minutorum non potuisse ignem videri amplius; attamen intra tantundem temporis, e fodina extractos, rursus ignescere.

B. Contigit idem carbonibus quoque nostris, immisso aere. Mirum ni illam fodinam machina nostra imitetur.

A. Procul dubio imitatur, nisi quod fodinæ illæ non omni tempore experimentum exhibent. Utrobique enim extinctio ignis eandem habet causam. Quod sic intelliges. Aerem, quem vi qua suctor in cylindro æneo retractus* ingredi cogit inter

* Sic Edit. 1661 et 1668.

superficiem suctoris convexam et cylindri concavam, quem deinceps cursum habere arbitratis?

B. Cursum habet, primo, secundum lineas illas erectas, quæ constituunt cylindri superficiem concavam; deinde, per lineas quæ constituunt superficiem lacunaris cylindri ejusdem. Itaque partes aeris ingredientis per lineas rectas diametraliter oppositas, movebuntur undiquaque motibus obviam contrariis. Necessario ergo se mutuo prementes conabuntur per lineas interiores; et propter pressionem undique æqualem, motum quidem habebunt in neutram partem sensibilem, conatum autem vehementem unaquæque pars contra partem sibi occurrentem.

A. Necesse ergo erit, ut totus ille aer, donec durent illi conatus oppositi, consistentiam majorem habeat quam si partes ejus solo contactu conjungerentur.

B. At neque candela, neque carbones in cylindro collocati sunt, sed in recipiente.

A. Scio. Sed lineæ, per quas motus ingredientis aeris designantur, aperto transitu, in communi ostio se mutuo secant, et per consequens, licet inverso ordine, conatus aeris similiter procedet in recipiente atque in cylindro; eademque erit utrobique aeris consistentia, media quædam inter consistentias aeris puri et aquæ. Cogita ergo, quam sit naturis earum ad candelam vel ignem vel vitam animalium, quæ saltem vitam pulmonibus debent, extinguendam vis similis consentanea; quamque necessarium sit conatu illo circulari in omni puncto recipientis motum vehementem, quanquam invisibilem, fieri. Simili modo circa vim, qua candela carbonesque igniti extinguuntur in fodinis, deter-

minari (quanquam phænomenon illud constans non sit) a ratione alienum non est, et dicere quod aliquando aer, e parietibus fodinæ ab omni simul parte efflatus, velocissimus et oppositis motibus fodinam impleat. Nam eadem omnia sequentur quæ in recipiente. Mirandum igitur non est, si effectus sint utrobique similes.

B. Extincti semel carbones cur reviviscunt? Et cessantem semel vitam quomodo recipiunt animalia?

A. De ea re quid sentiunt vestri?

B. Fuere eorum aliqui, qui remansisse dixerunt in carbonibus illis, quanquam extincti videbantur, particulas quasdem igneas, quæ admisso aere ventilatæ cæteram molem denuo accenderunt.

A. Næ illi, quæ dicerent, non videntur cogitasse, sed sortitos esse. Credin' tu, in carbone ignito partem aliquam non carbonem, sed ignem esse, aut in candente ferro partem inesse quod ferrum non sit, sed ignis? Ab unica scintilla magnæ urbis incendium nasci potest. Atqui si ignis corpus ab ignito diversum sit, non plures potuere esse partes igneæ in toto incendio, quam in una illa scintillula. Videmus corpora diversorum generum a luce solis tam per refractionem quam per reflectionem factam in speculis comburentibus accendi posse; neque tamen quenquam esse credo, qui putet particulas igneas, a sole ejectas, transire posse per substantiam globuli cristallini. In aere intermedio ignis nullus est. Motus autem in partibus minutissimis corporis combustibilis, si talis sit ut partes illas minutas ita dissipet et disjiciat ut aerem ad oculum satis fortiter moveat, ideam ignis faciet, non aliter quam oculo vehementer percusso vel fricato oriri

solet phantasma lucis. Sed naturam et causam tam ignis quam lucis, in libro DE CORPORE cap. XXVII, satis explicavit Hobbius. Quoniam ergo ignis natura a motu tali dependet, ut vis percussionis oculi exoriri faciat phantasma lucis; quanquam vis illius motus in recipiente, ut loquimini, evacuato diminuta sit, oppressa ab aeris intus commoti consistentia, non tamen extinguitur; et propterea levata oppressione, satis habebit virium ad excitandam phantasiam lucis, quanquam debiliorem. Idem sentiendum est de vita animalium, quæ in recipiente vel fodina videntur quidem esse mortua, motus tamen internus partium calorificus, vitæ proprius, nondum extinguitur, et proinde vitam paulo post recipiunt.

B. Quando autem est, quod de homine vere pronuntiare possumus quod est mortuus, sive, quod idem est, animam expiravit? Cognitum enim est homines nonnullos pro mortuis habitos, postridie elatos, revixisse.

A. De puncto temporis, quo anima a corpore separatur, difficile est statuere. Perge igitur ad experimenta alia.

B. Si demittatur in recipiens vesica mediocriter inflata, illa per reciprocationem suctoris amplius distenditur, et tandem, si opera urgeatur, disrumpetur. Quare autem?

A. Quia cuticula omnis ex filiculis constat, quæ præter* figuras, contactum per omnia puncta accuratum habere non possunt. Pervia ergo est vesica, cum sit cuticula, nec aeri tantum, sed etiam aquæ, qualis est sudor. Eadem ergo aeris, per vim

---

* Sic Edit. 1668. Quære "*propter* figuras."

incussi, est compressio intra vesicam quæ extra, cujus conatus, propter viam motuum undiquaque decussatam, tendit undiquaque ad superficiem vesicæ concavam. Quare necessarium est ut undiquaque intumescat, et crescente conatus vehementia tandem laceretur.

B. Si acus, magnete excitus, libere pendeat intra recipiens, sequetur tamen ille motum ferri quod circumducitur extra recipiens. Item objecta, intus posita, ab iis qui extra sunt videbuntur, et soni intus facti audientur. Omnia hæc æque post atque ante exuctionem aeris, nisi quod soni sunt aliquanto post quam ante debiliores.

A. Manifestissima hæc sunt signa recipientis semper pleni, nec posse inde exugi aerem. Quod autem soni inde sentiantur debiliores, signum est consistentiæ aeris. Consistentia autem aeris a motu ejus est per lineas diametraliter oppositas.

B. Etiam duo pendula æqualia et similia, in altitudine æquali, si alterum in aere libero, alterum in vacuato recipiente suspensum sit, simulque retracta sint a situ perpendiculari; eorum itiones et reditiones simul absolventur; differentia saltem manifesta non apparet.

A. Credo. Recipiens enim non erat, ut putastis, magis vacuum post quam ante suctionem.

B. Si duo corpora dura, puta, marmora plana, bene lævigata, se mutuo secundum superficies suas planas tetigerint, illa, ut scis, ita cohærebunt, ut in aere suspensa marmor inferius a superiore sine magno pondere, aut alia magna vi, separari non possit. Ponderi hoc attribuunt nostrum aliqui columnæ atmosphæricæ, cujus nixus per resultum terminatur in superficie inferiore inferioris marmo-

ris, quod per consequens etiam sustentat. Sed ne ejusdem marmoris superficiem premat ejusdem columnæ directum pondus, prohibet marmor superius contiguum. Siquidem ergo illa marmora sic cohærentia transferantur in recipiens, atque illic suspendantur, exucto autem aere marmor inferius cum superiore cohærere desinat, dubitari non potest quin causa assignata vera sit. Et translata in recipiens fuere, sed sine successu expectato. Nihilo enim magis desierunt cohærere: forte, quia non satis bene coaptata fuerant.

A. Imo, quia nihil istic erat quod ageret atmosphæræ pondus. Experimento hoc excogitari contra opinionem eorum, qui vacuum asserunt, aliud argumentum fortius aut evidentius non potuit. Nam si duorum cohærentium alterutrum secundum eam viam, in qua jacent ipsæ contiguæ superficies, propulsum esset, facile separarentur, aere proximo in locum relictum successive semper influente. Sed illa ita divellere, ut simul totum amitterent contactum, impossibile esset mundo pleno. Oporteret enim aut motum fieri ab uno termino ad alium in instante, aut duo corpora eodem tempore in eodem esse loco; quorum utrumvis dicere est absurdum. Causam autem quam assignant, vide quot quantisque incommodis laboret. Et primo columnam illam atmosphæricam, quam superficiei superioris marmoris inniti volunt, quæ sequuntur. Confitentur enim tum ipsi, tum alii omnes, ponderationem omnem conatum esse per lineas rectas undequaque ad centrum terræ; et proinde, non per cylindrum vel columnam fieri, sed per pyramidem, cujus vertex est centrum terræ; basis, pars superficiei atmosphæræ. Itaque si pyramis illa secetur a cohæ-

rentibus marmoribus, talis erit pyramidis illius figura, qualem definiet ambitus intersecantis eam marmoris. Conatus ergo punctorum omnium ponderantium propagabitur ad superficiem marmoris superioris, antequam possit propagari ulterius, puta, ad terram. Postquam autem conatus ad terram propagatus fuerit, aer rursus per resultum inde conabitur secundum easdem retro rectas ad superficiem inferiorem inferioris marmoris. Nam incidentes perpendiculares perpendiculariter reflectuntur. Quoniam ergo marmor superius ita suspensum est, ut conari deorsum non possit, omnis conatus innitentis pyramidis sistetur in marmore superiore. Non ergo propagabitur ad terram. Neque ergo fiet resultus ad marmor inferius. Non ergo oritur a resultu conantis atmosphæræ, quod marmor inferius ita sustentatur, ut a contactu cum superiore non separetur.

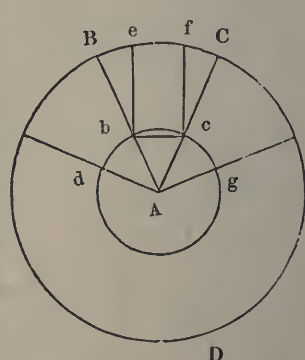
B. Certissimum est. Illi autem, qui causam ejus talem reddiderunt, non erant fortasse geometræ. Miror tamen paralogismum hunc non vidisse geometriæ professores, qui reflectionum vias ignorare non debuerunt. Sed vis illa elastica, quam in aere esse dicunt, nihilne ad marmor sustinendum conferre potest?

A. Nihil omnino. Non enim conatus in aere est ullus ad centrum terræ magis quam ad aliud quodvis punctum universi. Quoniam enim gravia omnia tendunt a circumferentia atmosphæræ ad centrum terræ, et inde rursus ad circumferentiam atmosphæræ, per easdem lineas reflexas, conatus sursum conatui deorsum æqualis erit, et proinde mutuo se perimentes neutra conabuntur via. Quin aqua gravis sit, non dubitatur; et siquidem homini

jacenti in arida* superponeretur satis magna columna aquæ, quæ illius corpori nec præterea ulli rei inniteretur, proculdubio a tanto pondere homo contereretur. Cæterum eidem homini jacenti in fundo maris, columnæ ejusdem innitentis pondus non sentiretur. Nam locus omnis in figura sphærica materiæ, quantumvis subtilis, a conatu (si quem habeat) a circumferentia ad centrum arcuatus sive concameratus est, ita ut non possit ruere, nec, per consequens, in ruinam niti. Id quod perspicue tibi descripta figura, si tanti esse putas, demonstrabo.

B. Tanti esse puto. Demonstra ergo.

A. Centro terræ A, radio AB, quanta est semidiameter atmosphæræ, describatur circulus BCDB. Sitque pars atmosphæræ intra totam posita ubicunque *bc*: super quam insistat columna atmosphærica *efbc*. Dico columnam *efbc* non premere gravitate sua partem *bc*. Nam si premit, propter gravitatem premit materiæ atmosphæræ. Conatus igitur columnæ *efbc* premet partem *bc* versus centrum A, id est, per rectas *b*A, *c*A, et cæteras intermedias. Omnis enim conatus corporis gravis est a circumferentia ad centrum terræ undiquaque. Quare *bc*, quæ major est quam ut possit descendere in triangulo *bc*A, non potest descendere nisi faciat rectas *b*A, *c*A divergere, ut sit descensioni locus. Sed fieri hoc non potest, quia conatus atmosphæræ in *db* et *gc*



* Sic Edit. 1661 et 1668. Quære "in aridam *terram*"?

tantundem facit *b*A et *c*A convergere, quantum pondus in *bc* facit easdem divergere. Non potest ergo pars *bc* (propter magnitudinem) quantumvis gravis sit, descendere; neque ergo premere sive gravitare. Quod erat demonstrandum.

B. Quod solum in Academia nostra ad philosophiam didicisse me somniaveram, hoc tu mihi totum, demonstratione tua expergefacto, ademisti.

A. Utraque enim illa phantasia tum gravitatis atmosphæræ, tum vis elasticæ sive antitupiæ aeris, somnium erat. Siquidem autem illis concederetur esse aliquam in filiculis aeris antitupiam, quæreretque aliquis unde illa, curvata quidem sed quiescentia, moverentur rursus ad rectitudinem: deberent illi, si physici haberi volunt, causam ejus aliquam possibilem assignare. Alioqui idem facient quod illi, qui ad questionem *quotam sonuit* respondere audent, quanquam primum ictum non audierunt. Præterea, si possibile esse negarem, ut diligentia et arte humana duæ superficies corporum durorum inter se per omnia puncta ita accurate congruæ fiant ut ne minimo quidem corpusculo creabili transitus permittatur, non video quomodo illi aut suam hypothesim tueri, aut negationem nostram improbitatis arguere, jure possent.

B. Experimentum tibi a machina nostra adhuc unum, (sed omnium mirabilissimum), nec plura referam. Suctorem qui usque ad cylindri summitatem intrusus fuerat, postquam omnis aeri aditus occlusus esset, vi manuum ad imum retractum vidimus: ita ut spatium in cylindro vacuum satis magnum esset. Suctori deinde pondus plus quam centum librarum appensum fuit. Vidimus suctorem, simul ac libertatem nactus esset, sua sponte

una cum appenso pondere ascendere usque ad cylindri summitatem. Jam si locus a retracto suctore relictus vacuus erat, quomodo vacuum illud, id est, illud nihil, pondus omnino trahere potuit? Sin locus ille aere erat plenus, quibus funibus attrahere, quibus uncis prensare potuit suctorem? Quanta vis illa elastica aeris externi erat, qua plusquam centum librarum pondus rursum in cylindro æneo, et suctori per omnia puncta contiguo, coactum est ascendere? Hærent hic nostri. Quomodo hæc expedies tu?

A. Expedivi ante. Aer enim a retractione suctoris retro pulsus, nec locum in mundo (ut supponimus pleno) quo se recipiat inveniens, nisi quem ipse, corpora contigua suis locis pellens, sibi faceret, perpetua pulsione in cylindrum tandem cogitur tanta velocitate inter cylindri concavam et suctoris convexam superficiem, quanta respondere solet viribus illis magnis quas ad suctorem revellendum necessarias experti estis. Aer autem ille qua velocitate ingreditur, eandem ingressus retinet, simulque latera cylindri ænei, vi elastica præditi, undiquaque distinet. Conatur ergo aer, in cylindro vehementer motus, contra omnes partes superficiei cylindri concavæ: frustra quidem dum suctor retrahitur; sed quam primum suctor manu emissus aerem impellere cessat, aer ille qui ante incussus erat, propter conatum in omne punctum superficiei cylindri internæ et vim æris elasticam insinuabit se inter easdem superficies eadem velocitate qua impulsus fuerat, id est, ea velocitate quæ respondet viribus impulsionis. Si ergo tanta ponderis vis suctori appendatur quanta manuum vis erat qua impellebatur, velocitas qua idem aer e cylindro exit,

locum in mundo pleno nullum habens quo se recipiat, suctorem rursus ad cylindri summitatem impellet, propter eandem causam quæ effecit ut suctor paulo ante impulerit aerem.

B. Verisimile est. Cætera experimenta machinæ, qui videntur ad easdem hypotheses tuas non difficulter reduci posse, præteribo.

A. Fateris ergo nihil hactenus a collegis tuis promotam esse scientiam causarum naturalium, nisi quod unus eorum machinam invenerit, qua motus excitari aeris possit talis, ut partes sphæræ simul undiquaque tendant ad centrum, et ut hypotheses Hobbianæ, ante quidem satis probabiles, hinc reddantur probabiliores.

B. Nec fateri pudet; nam est aliquid prodire tenus, si non datur ultra.

A. Quid *tenus?* Quorsum autem tantus apparatus et sumptus machinarum factu difficilium, ut eatenus tantum prodiretis quantum ante prodierat Hobbius? Cur non inde potius incepistis, ubi ille desiit? Cur principiis ab eo positis non estis usi? Cumque Aristoteles recte dixisset, *ignorato motu ignorari naturam*, quomodo tantum in vos suscipere onus ausi estis, et erigere hominum doctissimorum, non modo nostratium sed etiam exterorum, expectationem promovendæ physicæ, qui doctrinam de motu universalem et abstracte (quod facile et mathematicum erat) nondum statuistis? Ad causas autem propter quas proficere ne paululum quidem potuistis, nec poteritis, accedunt etiam aliæ: ut odium Hobbii, quia nimium libere scripserat de Academiis veritatem: (nam ex eo tempore irati physici et mathematici veritatem ab eo venientem non recepturos se palam professi sunt: "doctri-

nam Hobbii," inquiebat Owenus vice-cancellarius Oxonii, "quæcunque ea sit non recipiemus"): et quod paucissimi sunt eorum qui scientias profitentur, qui veritates difficiles ab aliis quam a se inventas esse non doleant. Sed missa hæc facientes, pergamus ad phænomena physica quorum causas non a machina ista, sed aliunde didicitis. Imaginare sphæram vitream, cavam, e qua promineat collum, illud quoque cavum. Per collum immittatur fistula ænea, quæ transiens per centrum pertineat fere ad fundum. Sit autem interstitium inter collum et immissam fistulam ita clausum, ut aeri pervium non sit. Per fistulam simul et collum transadigatur clavicula, qua possit transitus aeri et aquæ vel dari vel obstrui ad libitum. Totius instrumenti figuram videre potes ad finem cap. xxvi libri Hobbiani DE CORPORE. In sphæram hanc vitream si aqua per fistulam injiciatur magna vi, (ut fit in clysteribus), operaque repetatur quoties visum erit, (potest autem hoc modo aqua impleri circiter sphæræ dodrans), deinde, si versa clavicula exitus patefiat, aqua ascendens paulatim omnis ejicietur. Causam hujus phænomeni Hobbius hanc assignat. Aer, quo ab initio sphæra plenus* erat, a corpusculis illis terreis motus motu circulari simplice quem paulo ante descripsimus, vi injectionis coactus, qui quidem purus est exit aquam injectam penetrans in aerem extrinsecum, locum relinquens aquæ. Sequitur ergo, corpusculis illis terreis minus relinqui loci, in quo motum suum naturalem exercere possint. Itaque in se mutuo impingentes aquam urgent ad egressum: egredientem aer ex-

* "Plen*us*," edit. 1661 et 1668.

ternus (quia universum supponitur esse plenum) penetrat, locumque egredientis aeris* successive occupat, donec corpuscula, quantitate aeris eadem restituta, libertatem motui suo naturalem recipiant. Concessis autem illius hypothesibus, causa phænomeni manifesta est. Tui autem quibus hypothesibus idem phænomenon explicuere ?

B. Nescio. Sed cur non potest aqua quæ, cum injiceretur, particulas aeris comprimebat, ab iisdem particulis se explicantibus rursus rejici ?

A. Quia locum explicatæ majorem non requirunt, quam compressæ. Quemadmodum in vase aqua pleno, in qua esset multitudo anguillarum, anguillas sive in se volutas sive explicatas idem semper capit locus. Propellere ergo aquam per vim elasticam, quæ alia non est quam motus corporum se explicantium, non possunt.

B. Comparatio illa aeris cum aqua anguillis plena, nostris, credo, non displicebit. Aliqui enim non minimæ inter nos authoritatis in ea sunt opinione, ut si per vacuum intelligatur locus omni substantia corporea vacuus, non esset valde repugnandum. Supponentes enim constitutum esse aerem ex corpusculis quæ sine interstitiis componi non possunt, necessarium esse vident interstitia illa corporeæ substantiæ, vel (ut apertius dicam) corporis, capacia esse. Sed quod sic vacuum intelligunt *plenistæ*, præsertim nuperi, id non credunt.

A. Cur non credunt ?

B. Quia plenistæ disputantes contra vacuum, argumenta sumunt ab eo quod liquida suctione oris per fistulam ascendit: et ab eo quod in hortu-

---

* Sic Edit. 1661 et 1688.

lanorum hydriis, superne clausis et crebris foraminibus inferne pertusis, aqua non descendit. Nam talia, inquiunt, argumenta huc tantum tendunt, ut nullus detur locus in regionibus his inferioribus qui non sit aut corpore visibili aut aere repletus.

A. Nemo est eorum quos *plenistas* vocas, qui vacuum aliter intelligit quam pro loco in quo nulla omnino substantia est corporea. Si quis negligentius loquutus dixerit, *in quo non sit corpus visibile vel aer,* ideo dixit, quia per aerem totum illud intellexit corpus, quod præter terram et astra reliquum spatium omne complet. Illos qui hoc negant, non aliorum sententias arbitror animadvertisse, propriis intentos. Qui per fistulam ore aquam sugit, aerem medium prius sugit, quo distentus aerem externum removet: qui remotus, locum (in pleno) habere nisi proximum removendo non potest: et sic continua pulsione aqua tandem pellitur in fistulam, succeditque aeri qui exugitur. In hydriis autem perforatis ideo hæret aqua, quia quæ per tantillum foramen exiturit adeo exigua est, ut non possit ita in longitudinem se diffundere, ut descendendo aditum aeri faciat per foraminum circumferentias; neque aer ab exeunte aqua pulsus locum alium (in mundo pleno) habere potest, præterquam quem aqua deseret. Vides ergo causam naturalem tum ascensionis aquæ in fistula per suctionem, tum non-descensionis per foramina hydriæ. Vides etiam quam ineptum sit ad explicationem effectuum talium advocare verba metaphorica, ut *fugam vacui, horrorem naturæ, etc.*: quibus olim ad existimationem suam tuendam usæ sunt scholæ.

B. Phænomenωn quidem circa vacuum causas recte a te assignatas esse credo. Quod autem neminem esse dicas qui per vacuum intellexit cor-

pore visibili et aere vacuum, non facile concesserim. Videntur enim mihi tum Democritus, tum Epicurus, sic intellexisse.

A. Si per vacuum quid illi intellexerunt a doctrina Lucretii judicandum est, idem intellexerunt quod ego, nempe, locum omni corpore vacuum visibili et invisibili. Sed et illi non *plenistæ* fuere, sed *vacuistæ.*

Hactenus de natura aeris. Transeamus ad aquam. Si in pelvem infundas aquam, et in aquam segmentum panni lanei oblongum, cujus pars una in aquam sit immersa, altera extra pelvem propendeat, aqua pannum illum paulatim ascendens madefaciet usque ad pelvis labrum: et siquidem pars quæ est extra pelvem, propendeat infra aquæ quæ est in pelve superficiem, aqua decurret. Quænam hujus effectus a collegis tuis causa redditur?

B. Nihil de ea re audivi hactenus, nisi quod phænomenon hoc, et illud alterum siphonis flexi sive bicruri, causam habeant eandem.

A. Id vero impossibile est. Nam in siphone, nisi ambo crura aqua impleantur, aqua e pelvi non ascendet. Ascensionis causa in pannum est motus ille terrearum atomorum quæ aquæ contiguæ sunt, motus, inquam, circularis simplex, aeri in quo moventur communicatus: quæ atomi aquam ferientes in materiam laneam incutiunt, incussæ autem magis magisque madefaciunt, donec madida tota sit. Cum vero tota madida fuerit, tunc si pars panni extra pelvem superficie aquæ quæ in pelve est inferior sit, aqua per pannum defluet propter excessum gravitatis aquæ in segmento panni externo super gravitatem ejus quæ est in segmento intra pelvem. Nam gravitatis quantitas

in eadem specie corporis non sequitur gravis molem, sed altitudinem: quamquam de pondere aliter sentiendum est.

B. Hypothesim tuam de corpusculorum terreorum in aere terram ambiente motu circulari simplice, confirmat quidem experimentum hoc de hydria hortulanorum: magis tamen illud alterum de machina quam modo descripsisti, in qua injecta per vim aqua rursus ejicitur. Machinæ autem artificem novi.

A. Nonne et ille unus est ex collegis tuis?

B. Minime. Est enim machinopœus, non philosophus.

A. Siquidem philosophia sit (ut est) scientia causarum, quo magis philosophi habendi sunt illi qui machinas ad experimenta commodas invenerunt, experimentorum causas nescientes, quam hic qui causas nesciens excogitavit machinas? Differentia enim nulla hic est, nisi quod alter quod nescit nescire se fatetur, alteri non fatentur.

B. Post aquæ et aeris naturas examinatas, pergamus (si ita vis) ad naturam ignis. Et primo, ignis quid est? Corpus an accidens?

A. Qui ignem, et effectus ejus, quotidie vides et sentis et nominas, tibine opus est ut dicat aliquis quid sit?

B. Ego ignem vidi sine materia ignita nunquam. Lignum, carbonem, ferrum, materiam denique quamcunque, si candescat et calefaciat, ignem voco: et tu quoque. Mihi ergo videtur ignis corpus esse, vel potius multa simul in ligno, vel alia materia ignita, corpuscula ignea.

A. Sed corpuscula illa suntne ignita?

B. Non ignita, sed ignis merus.

A. Sed dixisti modo ignem esse ignita corpora. Itaque per ignem intelligis corpora quæ in ligno, vel alia materia, candescente et calefaciente candescunt et calefaciunt: ita ut ignis non sit nisi qui corpus sit et in igne alio, qui rursus sit in igne tertio, et sic in infinitum. Et propterea, ignem corpus esse a corpore ignito diversum, dictu absurdum est. Dum quærimus ergo quid sit ignis, non aliud quærimus quam causam, quare lignum, vel alia materia, lucet et calefacit: id est, causas quærimus lucis et caloris, vel potius sensionis nostræ, qua lucem et calorem percipimus.

B. Negari hoc profecto non potest. Sed lucis et caloris causæ veræ quænam sunt?

A. Illæ ipsæ quas in libro DE CORPORE, cap. xxvii, ab hypothesibus suis, methodo demonstrativa, non obscure derivavit Hobbius; quasque hic (quia liber extat) deducere non est necessarium. Sufficiat quod modo te docui, ignem non esse ab ignito corpore diversum. Quid autem de frigore et glacie opinamini vos? Num etiam frigus et glaciem corpuscula putatis frigida et glacialia esse, in materia frigida et glaciali?

B. De causis frigoris et glaciei nondum certi aliquid invenimus. Quod autem aqua dum congelatur rarefit, experientia didicimus.

A. Rarefit? Non intelligo. Siquidem enim eandem numero aquam majorem dicas implere locum congelatam quam non congelatam, id dicis quod animo concipere nunquam poteris. Nam idem numero corpus eandem semper habet quantitatem, nimirum, loco quem implet, sub quacunque figura, semper æqualem. Sin aeris particulas in aquam inter congelandum ingressas simul cum aqua,

majorem occupare locum dicas quam aqua sola, nil mirum dicis.

B. Dico, aquam eandem numero in cylindro vitreo altius ascendisse congelatam quam non congelatam.

A. Intelligo. In causa erat quod aqua congelata levior est, quam non congelata. Norunt enim omnes glaciem natantem parte sui aliqua, extra aquam in qua natat, eminere. Quod autem corpora omnia quæ mole æqualia aqua graviora sunt, subsidunt; et quæ leviora, eminent; quæ autem æquali gravitate sunt, ita natant ut summa eorum superficies collocata sit in superficie aquæ, demonstravit Archimedes.

B. Ad generationem ergo glaciei explicandam, necessarium esse video, non modo quid sit scire quod aquam facit congelatam leviorem quam ante erat, sed etiam quid sit quod eandem facit duriorem.

A. Leviorem facit, quicquid conatum ejus ad centrum terræ minuat sive impediat; id vero aliud esse non potest præter motum alicujus corporis conatui deorsum oppositum, si non diametraliter, at saltem oblique; idque, sive glacies fiat in vase per nive mistum sal, sive in locis apertis, ut in oceano septentrionali vel meridionali. Sed et duriorem facit motus aliquis oppositus. Nam durum dicimus illud tantum corpus, cujus parte una mota necessario cedit totum: ut lapis durus dicitur, quia si unam ejus partem premas, totus cedet, aut pars pressa non cedet, saltem sensibiliter. Unus igitur motus tum levitatem glaciei, tum duritiem, sive consistentiam partium, efficere potest. Motus

autem ille (quod attinet ad maria congelata) facile concipitur esse motus aeris vehemens, oceanum et terram undiquaque radentis per circulos meridianos in polis oppositis concurrentes. Talis enim motus aeris aquæ particulas summas protrudens compingit, id est, totam facit duriorem: simulque unamquamque particulam a centro terræ magis removet quam quanta est terræ semidiameter. Necesse ergo est tali motu aeris particulas aquæ summas aliquantulum sustineri: unde tota aqua compacta sive congelata redditur levior. Interea vero atomi illæ terreæ motu suo circulari simplice compactas aquæ particulas omnes simul concutiunt, ita ut nulla ejus pars moveri possit sine reliquis, id est, aquam totam duram faciunt. Similiter in vase accidit nive et sale circumdato. Nam liquescente nive, qui in nive est aer, exiens, superficiem undiquaque radit vasis aquam continentis, et eundem in aqua producit effectum quem modo descripsimus in congelatione marium, nempe, leviorem aquam et duriorem facit. Diaphaneitas autem (nam et hoc notatu dignum est) aliquantulum minuitur, propter aeris cum aqua summa mistionem. Diaphanum enim omne per partium positionem turbatam albescit.

B. Diaphanum autem a turbato situ partium cur albescit? Scio quidem vitrum, in partes minutas contritum, non amplius diaphanum esse, sed album; et ex aquæ particulis conflictis factam spumam, albam esse; et multa similia. Præterea diaphana omnia polita esse scio, et homogenea; et proinde, apta esse ad radios lucis ita reflectendos, ut lucidi partes suo ordine quasi pingantur, faciantque totius speciem distinctam; sed ignoro causam.

A. Ut diaphanum quodlibet est speculum, sic quoque partes ejus quantulæcunque, nisi planæ et in eodem plano sint, sunt totidem specula, repræsentantque totidem objecta lucida, sed minutissima, quorum imagines confertæ exhibent non unum lucidum magnum, sed ex omnibus conflatum unum colorem ad lucem proxime accedentem, quam vocamus *albedinem.* Itaque corporum, quæ natura alba sunt, superficies constant ex superficiebus innumeris, præ exiguitate quidem sigillatim visu non perceptibilibus, convexis tamen, et per consequens lucem ita reflectentibus, ut ab omni parte ad oculum pervenire possit tantum radiorum, quantum sufficit ad faciendam visionem; quod quidem ab una simplice superficie fieri non potest.

B. Qualem autem superficiem habere debet objectum, ut appareat nigrum?

A. Ut *album* luci, ita *nigrum* tenebris simile est. Et propterea superficies corporis nigri talis esse debet, ut nullus radius (vel paucissimi) eorum qui ab objecto lucido in eam incidunt, reflecti ita possit, ut ad oculum perveniat ubicunque positum.

B. Qualisnam est illa?

A. Ea quæ componitur ex partibus, minutissimis quidem et quæ visum singulæ fugiunt, sed erectis. Nam si minutissimæ sint eædemque erectæ, omnis radius in eam incidens a lucido objecto ubicunque posito, reflectetur in subjectum corpus, et per consequens ad oculum venire non potest: et sic *nigrum* non tam videtur, quam a circumstante visibili distinguitur.

B. Hanc ipsam nigredinis causam reddidit in frequente consessu unus ex nostris, tibi bene cognitus et amicus: sed non persuasit. Responsum

enim fuit, quod si ita esset, vestem omnem pilosam oportere esse nigram. Et visus est plurimis recte respondisse.

A. Quid, pilosne illos putaverunt esse corpora adeo exigua, ut videri non possent? Conjicere hinc licet quam sunt illi boni ratiocinatores: et quæ sit ab illis expectanda philosophia naturalis. Fortasse nigredinis causam illam pro vera admittere non voluere, quia eadem in libro DE CORPORE, cap. xxvii, art. ultimo, ab Hobbio primo assignata est. Quam autem *duritiei* causam assignatam ab illis audiisti?

B. Ab aliquibus tres: primam, partium magnitudinem: secundam, quod partium superficies mutuo se tangant: tertiam, partium intricatam positionem. Quarum sufficit ad corporum quorundam indurationem unaquælibet.

A. Quin corpuscula (qualia sunt atomi quas supponit Lucretius, atque etiam Hobbius) jam ante dura, facile possint ab aliqua dictarum causarum compingi, ita ut totum ex illis factum durum fiat, dubitandum non est. Sed qui *duritiei* causam assignare volunt, debent illi causam indicare *duri primi.*

B. Ita videtur. Quidam enim e nostris, cum redarguere illos vellent qui partium cohæsionem glutini cuidam tribuebant, interrogaverunt eos, (et recte quidem ut nobis visum est), quodnam esset glutinis illius aliud gluten.

A. Eodem jure utens circa primam et ultimam dictarum causarum, similiter quæro ego, quid sit in particulis duris totius duri quod efficit duritiem. Nam argumentum, quo vos usi estis contra illos qui supposuerunt gluten illud, æque militat contra vos ipsos.

B. Corpuscula dura prima, fuerunt fortasse sic creata: atque alia quidem majora, alia minora, ab initio.

A. Esto. Nam prima ad primam causam recte referuntur. Sed si dura ex primis duris fieri dicant, quare non et fluida fieri putant ex primis fluidis? An creari fluida maxima potuere, ut æther, minima non potuere? Qui corpusculum durum aut fluidum primus fecit, potuit, si libuisset, illud fecisse tum majus, tum minus quocunque corpore dato. Quod si fluidum fiat ex non fluidis, ut vos dicitis, et durum ex duris tantum: nonne sequitur ex fluidis primis, neque fluidum fieri, neque durum?

B. Ita videtur. Quænam ergo duri et fluidi sunt principia?

A. Quid aliud nisi, fluidi quidem, quies: duri autem, motus quidam ad illum effectum producendum idoneus? Per quietem intelligo duarum partium inter se quietem, cum se mutuo tangunt quidem, sed non premunt. Nam et fluida moveri tota possunt, retenta fluiditate; et dura quiescere, ut tamen partes eorum moveantur.

B. Quo motu et quomodo?

A. Exempli causa, aer qui revulso suctore machinæ vestræ impellitur in cylindrum æneum, totus quidem non movetur, sed in eodem manet loco: verum particulæ ejus omnes, ut magno motu ingressæ sunt, sic etiam magno motu intus cientur, unaquæque contra aliam per latus cylindri oppositum ingressam. Et proinde motus illarum in brevissimis spatiis sunt velocissimi, et propter mutuam oppositionem circulares. Atque hinc manifestum est vehementem esse in aere ita moto et clauso compressionem, quantam scilicet efficere

potest vis illa qua incussus erat; atque etiam a tanta compressione aliquem gradum consistentiæ fieri, quamquam consistentia aquæ minorem. Quod si esset in iisdem particulis aeris omnibus, præter motum illum quo altera alteram premit, motus ille circularis simplex, isque satis vehemens: impossibile fere esset unam earum a suo circello dimoveri, quin reliquis particulis resistentibus, totus simul moveretur, id est, totum durum esset. Durum enim est totum illud, cujus nulla cedit pars nisi cedente toto. Vides ergo posse fieri duritiem in fluidissimo aere per motum hunc circularem simplicem particularum, quibus duo motus contrarii ante dederant vertiginem. Vidisti quoque gradum duritiei dari aliquem posse a sola compressione: id quod confirmatur etiam in generatione carnis intra musculos humani corporis. Nam carnis, quæ in musculis continetur, materia illuc advecta est vel per arterias, vel per nervos. Non per arterias, in quibus nihil fertur præter sanguinem: caro autem non ex sanguine constat, qui salva carne elui potest. Quare materia carnis defertur ad musculos per nervos. Materia autem quæ in nervis continetur tenuissimus spiritus est: qui cum in musculis fit caro, constat ex innumeris filiculis adeo minutis et fissilibus, ut visum tandem fugiant. Unde autem fieri hoc potest, nisi quod spiritus e cerebro, nervorum meatus longos arctissimosque transiens, per compressionem inspissetur? Atque talis quidem esse potest causa efficiens *duri primi*. *Duri* autem *secundi*, id est, duri a cohæsione durorum primorum, causa potest esse motus ille idem circularis simplex conjunctus cum contactu eorundem superficiali, vel etiam intricatione. At si

supponamus cum illis, duritiei causam esse magnitudinem aut crassitiem partium: quam rationem reddere poterimus cur durior vel firmior sit aqua congelata, quam est eadem aqua ante congelationem?

B. Viderint illi. Ego enim alienæ philosophiæ narrator tibi, non defensor sum.

A. Præterea quæ ratio diaphaneitatis reddi potest corporum eorum, per quæ transparent objecta omnia visibilia non minus distincta quam per aerem purissimum? Nam si vitrum aut cristallus consisteret ex duris corpusculis hamatis, perplexis, aut quomodocunque poris disjunctis, impossibile esset ut radii lucis transirent per diaphanum sphæricum sine variis reflexionibus, quibus ordo partium turbaretur, et confusa fieret visio: quod experientia quotidiana ostendit esse falsum.

B. Experimentorum quæ fecimus aut recepimus observatu digna, ea sunt (quantum memini) quæ jam retuli.

A. De quæsitis autem circa naturam rerum aliarum, quid statuunt? Et primo, magnes quo instrumento, quo motu, attrahit vel abigit ferrum? Quid illum ad meridianum applicat, in meridiano inclinat? Quis motor, quo motu, aquam e mari et fluminibus in nubes transfert, aut e radicibus in arborum summitates? Ubi sunt pulmones ventorum? Quis motor, quo motu, oceani æstus facit et æstuum varietates? Quæ corporum varietas varietatem efficit odorum et saporum? Liquores qui in oculo idem efficiunt, cur in cæteris organis diversissima operantur? Lumen quid est? A quo et quo motu generatur, frangitur, et flectitur? Pharmaca quo motu operantur? Qua Gorgone ligna,

aliæque res non paucæ, lapidescunt? Denique, vita quid est, et quomodo generata?

B. De his rebus nondum statuerunt. Nec ita diu est quod de natura quærere incepimus, ut tantos processus expectare debeas. Parumne est quod doctrinam de vacuo, et de natura et pondere aeris, fere jam patefecimus, et brevi, spero, perfectam daturi sumus, nimirum, postquam experimenta nostra in altissimo illo monte fecerimus qui est in insula Teneriffa?

A. Bene est. Expectemus partum montis. Ego interea physica contentus Hobbiana, naturam et varietatem motus contemplabor. Etiam politicæ ejusdem et ethicæ regulis ad vivendum utar.

B. Recte quidem de politica. Est enim illa, ut physica nostra, experimentalis: nam vicennii proxime superioris experientia nimium confirmata est. Quid autem, quadraturam circuli, quam ille ante annum edidit, una cum divisione anguli, et iis quæ adjunxit de cycloide, de centro gravitatis semicirculi, etc.: etiamne illa approbas?

A. Quid ni? Cum causam dissentiendi omnibus esse videam unum eundemque errorem: quod linearum rectarum numerum multiplicare per numerum rectarum, perinde habent ac multiplicare per numerum simpliciter: ut manifestius apparebit in sequentibus. Transmissa est huc nuperrime e Gallia, authore anonymo, Gallice scripta duplicatio cubi geometrica, ut mihi videbatur, cui exemplar a bibliopola traditum est, satis bene demonstrata. Fuere autem quibus aliter visum est. Vidi enim duas ejus refutationes.

B. Duplicationem cubi demonstratamne esse dicis? Videam quæso.

A. Ex ipsa videbis refutatione quæ sequitur.

"Summa dictorum in pseudodiplasiasmo cubi nupero, rescissis quæ tum in schemate tum in constructionibus sunt superflua, hæc est.

"Exposita AD recta* continuetur ad V, ut sit DV semissi rectæ AD æqualis. Centro A, distantia AD, scribatur DO circuli quadrans, bisectus in Q; et QS rectæ AD perpendicularis. Bisecta vero SD in T, centro T, ducatur per V circulus VXYZ. Cui occurrat DX, rectæ AD perpendicularis, in X: AD in Y: et QS in Z.

"Affirmat rectas DY, DX, medias esse proportionales inter DA et DV. Quod sic conatur demonstrare.

"Ductis rectis VX, XY, erit angulus VXY in semicirculo rectus: ductaque XT et continuata, propter bisectam SD in T, occurret circulo in Z. Adeoque ducta YZ, erit angulus XYZ in semicirculo rectus: ipsaque YZ rectæ XV parallela.

"Producatur XD ad P, ut sit DP rectæ AD æqualis. Si itaque YZ producta rectæ PD occurrat in puncto P, erunt (propter similia triangula PDY, YDX, XDV) rectæ DP, DY, DX, DV continue proportionales. Et consequenter (propter cubos in ratione laterum triplicata) cubus lateris DY subduplus cubi lateris DP sive DA. Atque hactenus recte.

"Rectam autem YZ continuatam puncto P occurrere, probare frustra contendit.

"Ducta PV, et bisecta in *a*, ducatur *ab* rectæ DY parallela, rectæ DP occurrens in *c*: rectæque *ab* perpendicularis T*d*. Bisecta vero *dc* in *g*,

---

* Vide Figuram *De duplicatione Cubi.*

centro *g*, ducatur per *a* semicirculus *ahb* rectæ DP occurrens in *h*, rectæque *ab* in *b*. Ideoque propter *ca* æqualem semissi rectæ DV, tum *cg* semissi TD, erit *ab* semissi YV æqualis. Adeoque juncta P*b* et continuata, occurret puncto Y. Ductisque *bh, ha* rectis, erit angulus *bha* rectus, ipsæque *bh, ha* semissibus rectarum YX, XY æquales et parallelæ.

" Quæ quidem vera sunt. Sed non item et sequentia, nempe : bisecta itaque YZ in *i*, junctaque *ih* ; erit Y*ihb* rectangulum, et Y*b* rectæ XV parallela. Sed et YZ eidem XV parallela est. Ergo et YZ, sicut ipsa Y*b*, producta occurret puncto P.

" Hæc ille. Sed male. Sequitur utique ex prædictis Y*ihb* parallelogrammum esse, sed non item rectangulum : adeoque nec Y*b* rectæ XV parallelam. Non enim (quod ipsi fraudi fuit) quia *bha* angulum rectum esse ostenderat, ideo *bhi* rectum esse sequitur : nisi simul demonstrarat, rectam *ah* continuatam ad punctum *i* pertingere."

B. Mirandum sane est, quemquam esse qui, cum demonstrationem tam facilem et perspicuam non intellexerit, de quæsitis tamen in geometria nobilissimis, præsertim hominibus (ut putabat) exteris, auderet respondere. Confitetur Y*ihb* esse parallelogrammum : negat esse rectangulum. Quis enim non videt, completo circulo *ahbk*, ductam *hg*, et productam ad circumferentiam in *k*, æqualem esse et parallelam TZ : et P*b*, *a*T esse æquales, et per consequens *ah* productam transire per centrum T, et proinde secare XY bifariam et ad angulos rectos in *i* ?

A. Atqui refutator tantum abesse ait, ut eo

argumento quicquam de mediis proportionalibus concludatur, ut quantacunque sumatur DP, (sive ipsi AD æqualis, sive major, sive minor), eadem demonstratione non minus concludatur easdem DX, DY medias esse proportionales inter eandem DV atque hanc DP quamlibet.

B. Fieri non potest quin is, qui ita temere, absque demonstratione, pronuntiare ausus sit, nec demonstrationem ita perspicuam capere potuit, non modo arte sed etiam intellectu destitutus fuerit.

A. Ita tamen fuit ingeniosus, ut epistolas missas a rege, aliisque qui bello civili a rege stabant, scriptas scriptura occulta, sed interceptas, interpretatus sit, sive (ut loquuntur) decyphraverit.

B. Intelligo quem dicis.

A. Conatur præterea demonstrare, quod non modo non demonstrata, sed etiam falsa sit: hoc modo.

B. Nil refert quo modo. Quicquid enim cum demonstrato non convenit, non refutatio est sed refutatum.

A. Legamus tamen.

"Ponamus $DV=1$: adeoque DA vel $DP=2$. Cum itaque sint ejusdem circuli, tum AD radius, tum AS sinus graduum 45: erit $AS=\sqrt{2}$; et $SD=2-\sqrt{2}$; et $TD=1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Adeoque $TV=2-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; et $DY=3-\sqrt{2}$; et $DX=\sqrt{3-\sqrt{2}}$. Ideoque tribus, DV, DX, DY, quarta proportionalis (quam quidem abscindet YZ recta ad rectam DP continuata) erit $3-\sqrt{2}$ in $\sqrt{3-\sqrt{2}}$, hoc est 1.997 fere: minor quam $DP=2$. Adeoque YZ producta occurret rectæ DP, non quidem in puncto P, sed in puncto aliquo inter P et D. Et

consequenter, cum sit XYZ angulus rectus, erit XYP recto major. Verum itaque non est, vel rectam YZ continuatam ad punctum P pertingere; vel PYX, aut *bhi*, angulum rectum esse; vel *hi* eandem esse rectam atque *ah* continuatam, aut rectæ VX parallelam; vel denique, rectas DX, DY, medias esse proportionales inter DV, et DP, rectæ DA æqualem. Quod demonstrandum suscepi."

Quid contra demonstrationem hanc adduci posse putas?

B. Satis video DY æqualem esse $3-\sqrt{2}$. Itaque cum DV sit 1, DX erit $\sqrt{3-\sqrt{2}}$. Quare $\sqrt{3-\sqrt{2}}$ ducta in $3-\sqrt{2}$, erit tribus DV, DX, DY quarta proportionalis. Quare autem quarta illa sit 1.997, non intelligo.

A. Neque ego. Tribus ergo illis proportionalibus quæremus quartam nos. Sit DA 1000. Eritque AC $\sqrt{2000000}=1414$; et semissis ejus AS=707; a quo detractus semiradius, relinquit 207; et hic detractus a DA, relinquit 792 pro DY. Nam HS, AY, sunt æquales. Quare $792=3-\sqrt{2}$. Radix 792 est æqualis 28 fere. Itaque numerus qui fit a 28 in 792, est quartus* proportionalis, quam ille facit minorem radio, id est, minorem quam 1000; cum sit plus quam duodecuplo major. Præterea, cum dixisset DX esse $\sqrt{3-\sqrt{2}}$, et $DY=3-\sqrt{2}$, id est, DX esse radicem DY: quomodo non vidit eadem ratione DY debere esse radicem quartæ proportionalis; et proinde $3-\sqrt{2}$ multiplicatum in se (non in DX), esse quartam; et DV, id est, 1 multiplicatum in se, facere DX; et sic 1 in 1 æqualem esse $3-\sqrt{2}$, sive DY?

---

* Quart*us*, edit. 1661 et 1668.

B. Sed quid est quod in hoc tam brevi calculo illi fraudi esse potuit?

A. Fraudi fuit, quod etsi symbolicus esset satis, parum tamen erat geometra.

B. Non id quærebam, sed erroris fontem qui est in ipso calculo.

A. Alius non est, quam quod putavit DX æqualem esse $\sqrt{3-\sqrt{2}}$.

B. Nonne DX est media proportionalis inter DV et DY, id est, inter 1 et $3-\sqrt{2}$? Factus ergo ex 1 in $3-\sqrt{2}$, id est, $3-\sqrt{2}$, (nam 1 multiplicans nihil mutat), æqualis est quadrato a DX, et ipsa DX æqualis $\sqrt{3-\sqrt{2}}$.

A. Sic certe computavit refutator, sed male. Quamquam enim $3-\sqrt{2}$ multiplicatus in *unum* simpliciter, faciat $3-\sqrt{2}$, nihil mutans: multiplicatus tamen in *unam lineam*, nimirum in DV, facit rectangulum sub DV et DY. Rectangulum autem sub DV et DY non potest æquale esse suo lateri DY. Vides ergo errorem hunc tantum ex eo natum esse, quod computaverit pro recta linea rectangulum.

B. Certissime: et causa erroris fuit, ut dixisti, ignoratio geometriæ.

A. Altera refutatio cujus sit nescio: sed valde profecto est probabilis, et melioris algebristæ quam est Wallius.*

"Ponatur," inquit, "AB, sive AD=2."

"Erit DF, sive DV=1: ergo AV=3.

"BR sive AS= $\sqrt{2}$.

"Ergo SV, sive YD= $3-\sqrt{2}$.

"Cubus AD=8.

"Cubus DY= $45-\sqrt{1682}$ =4 fere.

---

* Sic Edit. 1688.

"Nam $45 - \sqrt{1681} = 4$.

"Est ergo DY paulo minor majore mediarum inter AB=PD, et DV=DF."

B. Sed quomodo demonstrat quod cubus a DY, æqualis sit 45 detracta radice numeri 1682.

A. Ex eo quo DY est æqualis $3 - \sqrt{2}$: qui multiplicatus in se, et rursus in productum, facit $45 - \sqrt{1682}$.

B. Exhibe formam operationis.

A. Ellam:

$$
\begin{array}{r}
3 - \sqrt{2} \\
3 - \sqrt{2} \\
\hline
- \sqrt{18} + 2 \\
9 - \sqrt{18} \qquad \\
\hline
9 - \sqrt{72} + 2 \\
3 - \sqrt{2} \\
\hline
- \sqrt{162} + 12 - \sqrt{8} \\
27 - \sqrt{648} + 6 \qquad \\
\hline
27 - \sqrt{162} - \sqrt{648} + 18 - \sqrt{8} \\
\hline
\end{array}
$$

Sed ut eam examinare possis, meminisse oportet duarum regularum alteram multiplicationis, quæ hæc est: *Radix duorum numerorum inter se multiplicatorum, est æqualis facto ex eorum radicibus.* Alteram additionis, quæ est hæc: *Radix numeri conflati ab utroque numero, et ex dupla radice numerorum inter se multiplicatorum, est summa radicum ipsorum numerorum.* Quas regulas jamdudum tibi demonstravi.

B. Et memini quidem. Sed cur ponis $\sqrt{72}$ pro $2\sqrt{18}$?

A. Quia radix numeri quadrupli dupla est radicis numeri simpli.

B. Cur pro facto ex $\sqrt{2}$ in $\sqrt{72}$, ponis 12?

A. Quia $\sqrt{2}$ in $\sqrt{72}$ facit $\sqrt{144}$: id est, 12.

B. Ostende jam totum productum æqualem esse 45— √1682 : id est, (quia video numeros affirmatos 27.12.6. esse 45), ostende numeros negatos, nempe, √162. √648. √8. simul additos esse √1682.

A. 648 in 162 facit 104,976. Hujus radix duplicata est 648
Summa conflata ex 648 et 162 est . . 810
Ergo √648 + √162 est . . . √1458
Rursus 1458 in 8 est 11664. Hujus radix duplicata est 216
1458+8 est 1466
Radix summæ est . . . . √1682

B. Possumus idem aliter computare sic : Cubus a 3— √2 æqualis est cubo a 3 (id est, 27) minus tria quadrata a 3 in √2 (id est, √1458=38$\frac{2}{11}$) plus tribus quadratis a √2 in 3 (id est, 18) minus cubo a √2 (id est,—2). Quantitates affirmatæ sunt 27 et 18, id est 45. Negatæ sunt 38$\frac{2}{11}$ et 2. Itaque cubus a 3 — √2 est 45—40$\frac{2}{11}$, id est, multo minor quam 45 — √1682.

A. Vides ut non consentiant inter se calculi arithmetici, utque faciunt 2, qui est cubus, æqualem lateri cujusdam quadrati quod est æquale 8.

B. Hi duo calculi, quamquam facti secundum regulas algebræ, non tamen consentiunt, neque inter se neque cum calculo geometrico. Certissimum enim est DY esse mediarum inter AD et DV maximam ; et proinde cubum a DY esse 4. Problematum ergo geometricorum examinatio per algebram plerumque inepta est. Itaque nec Scaligerum Clavius, nec Hobbium Wallius * circa circuli quadraturam legitime refutavit. Sed cal-

* Sic Edit. 1668.

culus arithmeticus cum a geometrico differat, cur tantillum differt, nimirum, quanta est differentia inter $\sqrt{1681}$ et $\sqrt{1682}$?

A. Quia qui lineas consideratas sine latitudine multiplicat, non facit planum, sed numerum linearum. At ille qui lineam rectam in lineam rectam ducit, numerum linearum non facit, sed superficiem planam. Inde enim necessario accidit, ut in lateribus planorum, puncta quæ sunt in angulis communia duarum rectarum bis numerentur, et in lateribus cuborum ter.

B. Intelligo jam, non modo quod duplicatus sit cubus, ratio perimetri circuli ad radium inventa, vera cyclois descripta, centrum gravitatis semicirculi repertum, angulus in data ratione divisus, lineæ parabolæ vel cujuscunque paraboloidis curvæ æqualis inventa recta: sed etiam cur ante hoc tempus inventæ non sunt, nempe, quod perinde habitum sit multiplicare res per numerum simpliciter, et per numerum rerum earundem.

A. Si recta *ai* producatur donec secet diagonalem DB, puta in *l*, erit D*l* diagonalis quadrati, cujus latus est media arithmetica inter DY et DX. Id enim sequitur necessario, si modo DY, DX mediæ sint proportionales inter AD et AV.

B. Necessitatem illam nondum percipio.

A. Nisi ita esse meditando invenias ipse, demonstrabo ego; sed alio tempore.

B. Sed antequam discedamus, dic mihi an ex illis literis V. A. Q. R. authorem nosti problematis?

A. Literæ illæ initiales sunt horum verborum, *Un Autre Que Roberval.*

B. Discedo jam multo, ut mihi videor, quam

ante certior: et quæ dixisti omnia teneo et probo, nisi quod causam quare suctor retractus, et deinde manu elapsus, ad summitatem cylindri velociter ascendat, recognoscens recte assignatam esse non putem. Nam incredibile est in motu particularum (quas supponis) terrearum, tantam inesse vim ut id efficere possit. Quod autem aerem qui incussus fuerat expelli inde infers, ego contra, ideo suctorem subito ascendere existimo, quia, retractione cessante, aer qui impulsus magna vi fuerat, eadem vi inter suctoris superficiem convexam et cylindri concavam expellitur, et proinde (supposita plenitudine mundi) aer externus, ad locum suum restitutus, simul suctorem restituit ad locum unde retractus ante fuerat.

A. Idem censeo. Erravi: et errorem meum recte correxisti.

FINIS.

PROBLEMATA PHYSICA.

AD REGEM.

Fero ad te, potentissime, serenissime, optime Rex, humillimeque offero, problemata quædam mea circa Naturæ Phænomena, non modo illa quæ ab omnibus observari solent, sed etiam illa alia quæ ab hominibus ingeniosis per artem et machinas nuperrime exhibita sunt: meditationum mearum physicarum partem maximam et probabilissimam.

Redegi autem ea, ordinis causa, ad capita septem. I, De Gravitate. II, De Æstibus Marinis. III, De Vacuo. IV, De Calore. V, De Duro et Molli. VI, De Tempestatibus Aeris. VII, De diversis Motuum generibus. Quibus adjecta est Duplicatio Cubi.

Principia physica, non ut definitiones et axiomata in mathematica, certissima sunt, sed tantum supposita. Effectus enim Naturæ idem quin a Deo Naturæ conditore multis modis conduci potuerit, nihil prohibet.

Quoniam autem quicquid producitur, per motum producitur, is qui suppositis motibus quibusdam possibilibus, illis usus demonstrandi principiis, propositi phænomeni necessitatem recte intulerit, is inquam tantum fecit quantum ab humana ratione expectari debet.

Neque illud parvum est. Etsi enim rem ita revera generatam esse non probet, ita tamen generari posse quoties materia simul et motus in nostra potestate sunt, satis probat. Id quod humanis rebus non minus utile est, quam si cognitæ essent ipsæ causæ naturales.

Naturæ autem contemplatio, etiam sine illis severis demonstrationis legibus, modo verbis, qualia in scriptoribus Physicæ non raro reperiuntur, inanibus et ineptis non turbetur, omnium animi operum nobilissimum est: illis saltem, quibus otium est a studio rerum communi vitæ necessariarum.

Quod a me in hoc libello effectum est, munus esse scio tanto Rege indignum. Attamen si spectetur (quo modo oblationes spectare solet Deus) una cum animo et re offerentis, non ingratum fore sperare debeo.

Verum ut hæc ad tuam Majestatem ferrem, multæ me impulerunt causæ. Primo, quod cognoscenda essent a judice cujus esset intellectus optimus, et ratio neutrius partis studio inflexa, nec verbis significantibus quidem nihil, sed qualia difficultatibus pressi ne nihil dicerent un-

decunque arripiunt, perturbata. Deinde, quem studium Naturæ delectat. Præterea, qui experimenta de quibus hic disseritur, ipse nosti. Et denique, cujus judicio si placent, a contradicentium contemptu et maledictis possim protegi.

Restat ut, more offerentium, adjungam oblationi preculam: nempe, ut lectione dignari velis brevem quæ sequitur *Apologiam* pro libro meo, quem de Republica sermone patrio scriptum appellavi LEVIATHAN. Non tamen ut apologiæ qualicunque, sed Amnestiæ generali confidere consilium mihi sit. Nec ut me non modo venia, sed etiam gratia tua jam utentem, et beneficio tuo gratissimo ornatum, apud Majestatem tuam purgare necesse habeam: sed ut, eorum causa qui malevolis meis temere credentes aliter de me quam æquum est sentiunt, sententiam meam duriusculam publice possim aliquantulum emollire.

Primo, dogma ibi quod theologorum sententiæ communi contrarium sit, nullum directe affirmo: sed, ut diffisus, illorum decretis disertis verbis submitto, quorum est in Ecclesia regenda summa authoritas. Deinde, postquam Ecclesiæ authoritas restituta esset: nam dum hæc scribebam, Ecclesiæ Anglicanæ regimen nullum erat, sed unusquisque quicquid voluit libere scripsit ediditque: neque scripto neque colloquio illa unquam defendi.

Præterea, nihil scripsi contra episcopatum, neque contra episcopum quemquam protestantem. Quam ergo causam habeat episcoporum nostrorum quisquam de me loquendi tanquam de Atheo, plane nescio. Nonnulli tamen eorum, ut audio, id faciunt: atque etiam illam a clementia tua profectam *Amnestiam*, qua et ipsi usi sunt, mihi invidentes, illius libri memoriam cum dedecore meo, in concione etiam coram te ipso, contra charitatem Christianam refricant.

Quoniam autem plerisque eorum displicuit etiam liber meus DE CIVE, in quo dogmata illa quibus offenduntur non apparent, fieri potest ut ægre ferant quod Ecclesiæ authoritatem dependere faciam a potestate regia: id quod credo non videbitur Majestati tuæ *atheismus* neque *hæresis*, cum Ecclesia Anglicana nihil aliud sit quam populus tuus.

" Sed quid tu", objiciet aliquis, " omnino hæc tractas, cum religio non philosophiæ pars sit, sed legis?"

Recte quidem hoc, siquidem qui sic objiciunt, sic sentirent. Sed mea hæc illo tempore scribebantur, quo Regnum Christi summis sceleribus prætendebatur. Jure ergo hypocrisim sceleratorum hominum indignatus, Scripturæ Sacræ de Regno Dei quid dicerent quantum potui penitissime scrutari statui.

Tantæ igitur calumniæ causa in libris meis nulla est.

Vitam meam nemo, puto, accusabit. Qualis autem eram in ipso mortis pene articulo, testem cito reverendissimum virum Episcopum Dunelmenensem*. Quæ cum ita sint, lectores meos monitos hic vellem, ne malevolorum convitiis temere credentes aliter de me quam æquum est sentire velint: nec vitio vertant, si contra hostes tuos pugnans, et quæcunque potui tela corripiens, gladio uno usus sum ancipite.

Majestatis tuæ (post Deum) sanctissimæ

fidelissimus subditus

THOMAS HOBBES.

---

* Sic edit. 1662 et 1668.

INDEX CAPITUM.

PROBLEMATA PHYSICA.

CAP. I.

PROBLEMATA DE GRAVITATE.

A. QUAMNAM putas esse posse causam, quod lapides aliaque corpora terrestria in altum projecta sive evecta, et dein demissa, ad terram rursus descendunt, idque (quantum scimus) sua sponte? Credere, cum philosophis antiquis, quod terram ament vel appetant, non possum: neque quod per contumaciam aliquam, desinentes progredi, manere tamen nolint; cum tota tellus fluctuari in aere non dedignetur. Veruntamen in aere nihil neque video, neque imaginari possum, quod illa dejiciat.

CAP. I. De gravitate.

B. Causam gravitatis in appetitu collocare, insanum est. Homines enim, sicut cætera corpora gravia, ab alto necessario nisi sustineantur cadunt: et casu (quod tamen minime appetunt) aliquando pereunt. Necesse ergo est, ut gravia, postquam motus quo projiciuntur extinctus sit, aut maneant, aut ab aere moto ad terram referantur. Nam corpus omne quod quiescit, novi motus initium sibi ipsi dare non potest. Probabilius ergo nihil est, quam quod motus aliquis ipsi telluri insit, (quem homines, propterea quod terræ insistunt, percipere non possunt), quo aerem facilius a se rejicit quam cætera corpora. Hoc enim supposito, et præterea quod locus corpore vacuus nullus sit, necessitas

CAP. I.
De gravitate.

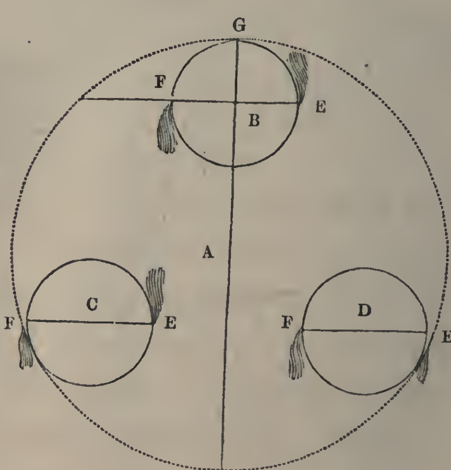
descensionis aliorum corporum facile demonstrari potest. Nam rejecto aere, necesse est (in mundo pleno) ut in rejecti locum ea succedant quæ difficilius rejiciuntur.

A. Verum supposito in præsentia vacuum non esse, (nam quæstionem illam in aliud tempus differam), qui fieri potest, ut terra aerem aut aliam rem quamcunque a se projiciat?

B. Ostendam tibi, idque exemplo nimis familiari. Si utraque manu pelvem tenens, in qua sit paulum aquæ, illam circumagas, sed intra spatium quantum potes minimum, videbis aquam per latera pelvis assurgere et exilire. Ex quo manifestum est, motum esse quendam, per quem id quod sic movetur corpora sibi contigua et fluida a se rejicit.

A. Talem motum esse certo scio. Ejus enim generis est motus ille quo agricola cribrum circumagit ut frumentum cribrando purget. Nam quæ granis frumenti corpora heterogenea sunt, ad medium cribri coguntur, grana autem frumenti ad latera rejiciuntur. Sed figuram motus quem dicis, applicatam videamus ad terram: ut motum illum in convexo sphæræ, non in pelve concava consideremus.

B. Sit circulus punctim descriptus, cujus centrum A. Intra hunc sint tres circuli minores, B, C, D: qui circuli tellurem repræsentent procedentem a B ad C, et a C ad D, semper tangentem circulum illum punctis de-



CAP. I. De gravitate.

signatum cujus centrum est A, semperque aerem (notatum per E et F) projicientem. Supposito jam quod mundus non esset plenus, sequeretur, propter aeris dispersionem, ut multa loca essent vacua. Sed mundo pleno, hoc tantum sequitur, ut partes aeris inter se omnes loca mutent.

A. Sed quid est quod lapidem descendere cogit, puta, a puncto G?

B. Si aer projiciatur omnis ultra G undequaque, sequitur necessario, ut lapis tandem veniat ad terram: supposito, inquam, mundo pleno.

A. Quare autem fit descensus crescente semper velocitate?

B. Quia dum descendit novam accipit impressionem ab eadem causa continuata, nempe ab aere, cujus ut una pars ascendit, alia, mundo pleno, descendit lapidem impellens.

A. Quod si pars aeris descendens lapidem pellat deorsum, eadem ratione pars aeris ascendens eundem sursum pulsura est: itaque lapis nec descenderet nec ascenderet, sed maneret ubicunque.

B. Ab ascensu et descensu partium aeris se mutuo prementium non fit quies, sed excursio ad latera, quemadmodum duo corpora mollia compressa expandunt se ad compressionem: unde efficitur ut per motum partium aeris verus motus aeris tendat versus polos, et propterea in omni parte subsidat: et dum pars superior lapidem depellit, inferior cedit. Nam ex ipsa figura manifestum est, quod motus telluris intra circulum punctis designatum, partim progressivus est, nempe, pro magnitudine diametri per A, et partim circularis, quia omnia ejus puncta describunt circellos inter se æquales. Quoniam autem in omni puncto aeris

CAP. I. De gravitate.

cadenti lapidi nova contingit impressio, novum etiam ubique accidet incrementum velocitatis.

A. Ita certe videtur. Nam acceleratio temporibus æqualibus semper est æqualis : ita ut spatia percursa, si incipiant a quiete, sint in duplicata ratione temporum ubicunque sumpta, ut ostensum est a Galileo. Video autem hinc phænomeni cujusdam solutionem, quam ante videre non potui. Scis duo pendula longitudine æqualia, si a perpendiculo per angulos æquales simul removeantur, itiones et reditiones simul facere. Et quamquam arcus quos motu suo describunt, continuo decrescant, tempus tamen in quo majores arcus describuntur, tempori in quo describuntur minores est æquale.

B. Ita est. Vidistin' unquam experimentum in quo illud verum non erat?

A. Etiam. Nam si pendulorum alterum a perpendiculo dimoveas, exempli causa, per angulum 80 graduum, alterum per angulum 60 graduum: tunc itiones et reditiones non simul fient.

B. Sed inferri hinc non potest, quod tempora inæqualia erunt quando anguli sunt æquales.

A. Sed quando anguli sunt inæquales, unde accidit inæqualitas temporum?

B. Ab ipsa inæqualitate angulorum. Nam arcus quos faciunt, sunt spatia quæ percurruntur: in quibus pendulum quod a majore altitudine descendit, velocius movetur quam quod a minore.

A. Quæ hactenus dixisti, facile credo, ab omnibus recipientur: nisi quod telluris cum pelve et cribro comparatio ipsa, phantasiæ potius soboles quam rationis esse videri possit. Nonne satis est quod telluri, quam quiescere existimabant veteres, dedimus jampridem motum super centrum suum

De gravitate.

propter diem, deinde motum in ecliptica propter annum, ut dandus sit illi etiam novus hic motus neque rectus, neque proprie loquendo circularis?

B. Non hoc videri tibi novum debet, qui scis quod corpus omne tot motus simul habet, quot sunt extra ipsum corpora agentia: veruntamen, in unum motum compositos. Nam etsi multarum partium corporis unius multi sint motus, totius tamen unus est motus. Nonne qui navigat, movetur simul cum nave: et interea, quaquaversum super tabulata ambulat, manibus varie jactatis, sanguine per venas, spiritibus per nervos discurrentibus, pulmonibus dum spirat, lingua et labris dum loquitur, inquietis? Multiplex ergo telluris motus res tibi nova esse non potest. Quod autem attinet ad ipsum hunc motum quem cum motu pelvis vel cribri comparo, quamquam familiaritate despicabilis sit, non tamen ob eam rem negandum est quin tali motu natura uti possit. Illi vero qui suppositionem hanc aspernantur: cum ascensus et descensus sint motus, et nihil possit initium motus cujuscunque dare sibi ipsi, et per consequens causa gravitatis sit necessario motus aliquis: illi, inquam, motum alium assignare debent, et causam descensionis gravium inde demonstrare. Id quod nemo hactenus fecit. Cæterum, cum multa alia phænomena præter gravitatem per hunc motum explicaverim, humilitatem exempli, credo, non contemnes. Siquidem autem vera gravitatis causa fortuito tibi ostenderetur, non dubito quin non minus videretur tibi phantastica ea quam hic assignavi.

A. Sed ad quas cœli partes spectare supponis motus istius tui polos?

B. Suppono eos eosdem esse cum polis eclipticæ.

CAP. I. De gravitate.

Quoniam enim terræ axis per omnem motum annuum semper est sibi ipsi parallelus, necessarium est tali parallelismo conservando, ut poli motus hujus et motus annui sint iidem: quantum saltem judicare sensus potest. Circulus enim quem punctis notavi, et intra quem moveri terram suppono, magnitudinem respectu solis habet insensibilem: nam suppono hoc quoque.

A. Etsi satis intelligam quo modo gravia deorsum, idque velociter in medio loco inter polos motus hujus, id est, sub eclipticam dejiciantur: non tamen satis capio, quomodo idem fieri possit sub eclipticæ polos. Dicturus enim puto non es, quod lapis descendit velocius inter tropicos, quam prope polos eclipticæ.

B. Non multo quidem velocius. Potes autem animadvertisse, quod flocci nivis quo proprius acceditur ad polos, eo majores sunt: id quod signum non minimum est, quod cadunt a loco sublimiore apud nos quam in partibus polo arctico propinquioribus; et ob eam causam in minores partes cadendo dividuntur, more aquæ ab alta rupe perpendiculariter decidentis. Sed utcunque id sit, videre potes ex ipsa figura, quod motus rejecti aeris in E et F non est ad terram perpendicularis, sed tendit partim quidem in altum, partim vero versus polos: et propterea etiam sub ipsos polos non multo tardius movetur quam inter tropicos. Præterea, motum hunc suppono non modo in terra, sed etiam in sole, et luna, et reliquis stellis tam fixis quam errantibus: quorum motuum compositione, motus aeris a medio mundi versus polos augeri aliquantum necesse est.

A. Verisimile est.

CAP. I.

De gravitate.

B. In reddendis causis naturalibus ultra verisimile ire hominibus non conceditur. Veruntamen meliora hæc sunt, quam ut aut causam descensionis gravium dicamus esse gravitatem, ubi quæritur causa gravitatis: aut quod gravia a terra attrahuntur, cum quæritur quomodo attrahuntur, quibus nimirum uncis, quibus funibus.

A. Vellem etiam hoc scire, cur terra facilius hoc motu aerem rejicit quam alia corpora.

B. Globus telluris totus cum sit aeri undequaque contiguus, nihil rejicere aere prius potest. Rejectus simul aerem proximum facilius movet quam aliud corpus, qualecunque illud in aere esse contigerit: propterea quod similia corpora similes motus facillime recipiunt: quemadmodum accidere videmus in chordis duarum lyrarum similiter tensis, ubi pulsata una, concutitur alia similiter tensa, etsi non proxima. Præter aerem autem, corpus nullum est quod motum non habeat aliquem, quamquam invisibilem, partium suarum internum, quo natura ejus sive species ab omnium aliorum corporum naturis et speciebus distinguitur et dignoscitur.

A. Quæ causa est quod gravia quædam corpora, ut lignea, sed cava et repleta pulvere nitrato aliquantulum humectato: quamquam lignum, et pulvis ille, et humor, omnia sint gravia: ascendunt tamen simul atque pulvis accensus sit?

B. Eadem quæ sustentat hominem natantem in flumine. Nam homo sustentat se, aquam pedibus repellendo. Ignita se allevant repellendo aerem flamma.

A. Vas æneum, vel ex alia materia gravi, natabit, si sit superne concava. Quam ob causam?

B. Ita quidem, si sit satis concava, ut quantum

CAP. I. De gravitate.

opus sit capiat aeris. In causa autem est, quod tantum illi inest aeris, ut totum simul vas et aer facilius a terra rejici possit, quam moles aquæ ambobus æqualis.

A. Unde fit ut piscis: maxime vero qui valde latus tenuisque sit, ut passer et rhombus: in fundo maris tanto aquæ pondere incumbentis oppressus, non pereat?

B. Quia gravia omnia tendunt ad globi terrestris centrum. Nam a descensu partium gravis fluidi eodem tempore omnium versus unum punctum, necessario oritur ubique concameratio talis ut pars superior inferiorem premere non possit.

A. Concameratio similis cur non in aere quoque est?

B. Est.

A. Quomodo ergo (id quod a philosophis quibusdam e Societate Greshamensi scribitur) aer inferior a superiore gravitante comprimitur, unde oriri scribit aeris quandam vim elasticam? An aer prope terram, impurus per commistas illi particulas, dicetur gravitare?

B. Quid si aquæ oceani permisti essent pulvisculi terræ: an ideo pisces in ea aqua opprimerentur?

A. Minime quidem, dum pulvis ille, etsi plumbeus, ab aqua sustentatus fluitat.

B. Sed fluitant quæ sunt in aere sive atmosphæra atomi terræ. Itaque qui sic scripserunt, non satis rei naturam contemplati sunt.

A. Tua hæc, sive vera sive falsa, specimen veri certe habent. Et quoniam nemo causam gravitatis ullam hactenus assignavit præter ipsam gravitatem, tuis in præsentia acquiescam.

CAP. II.

PROBLEMATA DE ÆSTIBUS MARINIS.

CAP. II. De æstibus marinis.

A. Quæ causa est quod ad idem littus affluat, et inde rursus refluat, oceanus bis in die naturali?

B. Redeundum est ad pelvem; in qua vidisti modo, ut per latera ejus, cum moveretur, aqua circumibat simul et ascendebat. Cogita nunc quid eveniret, si a labris summis pelvis per fundum transiens affixus esset obex, qui circumeuntis aquæ cursum impediret. Nonne aqua cum in illum obicem impingeret, reverteretur subsidens gradatim? Nonne et idem contingeret etiam ad alteram partem obicis, quanquam non eodem tempore? Quod cum fiat, necessarium est, ut in omni motus aquæ periodo aqua elevetur et subsidat ad idem latus.

A. Sed quem in oceano obicem vides similem illi quem in pelve statuis?

B. Situm oceani magni nosti ex tabulis geographicis, ut inter orientem et occidentem extendatur: primo, ab India ad partem australem Americæ; deinde, ex altera parte Americæ ad Indiam. Itaque si terra motum habeat qualem supposui, nascetur inde cursus aquarum oceani ab India versus fretum Magellanicum; quod fretum molem tantam capere non potest. Itaque obex qui cursum oceani impedit, et per litora assurgere et residere facit, est pars illa Americæ Australis quæ Magellanico freto adjacet. Quod autem de litore Americæ obverso ad Orientem dixi, intelligendum etiam est de litore averso. Surgens autem ad litora Americæ Australis oceanus, causa est æstuum maris Atlantici, et

CAP. II.
De æstibus marinis.

marium omnium quæ ab illo in Septentrionem continuata sunt: nisi quod partim augeantur etiam a mari magno Australi, per fretum Anian inter Asiam et Americam in maria septentrionalia influente. Quod autem mare unoquoque die ad eundem locum bis repleatur, argumenti loco mihi est, quod periodus motus, quem in terra supposui, uno die naturali bis compleatur fere.

A. Sed nonne etiam mare Mediterraneum extenditur ab Oriente in Occidentem? Cur non etiam in illo similes fiunt æstus?

B. Fiunt: sed, pro longitudine et aquæ quantitate, minores.

A. Genoæ et Anconæ æstus nulli sunt, vel saltem insensibiles.

B. Venetiis autem, et ad litora Palæstinæ, valde sensibiles sunt. Cæterum, propter cursum secundum longitudinem maris Mediterranei et Sinus Adriatici, minus assurgit aqua in litoribus a quibus minime impeditur.

A. Quomodo autem his rebus ita se immiscet luna, ut in noviluniis et pleniluniis æstus marini ubique insigniter augeantur?

B. Motum quem in tellure supposui, suppono quoque in sole, et luna, et cæteris stellis omnibus. Quod autem attinet ad motum hunc quatenus in sole et luna consideratur, polos ejus eosdem esse suppono cum polis circuli æquinoctialis. Quo supposito, sequitur, quoniam sol, luna et terra in omnibus noviluniis et pleniluniis sunt in eadem fere recta linea, ut motus hic terræ velocior fiat in noviluniis et pleniluniis quam in quadrantibus. Nam motus hic solis et lunæ communicatus terræ, motum illius similem necessario auget: maxime

De æstibus marinis.

tamen cum sunt in eadem linea recta; id quod contingit in noviluniis et pleniluniis solis.

A. Quænam autem causa est, quod bis in anno, nimirum in æquinoctiis, æstus fiunt omnium multo maximi?

B. Cæteris anni temporibus, quia terra non est in plano circuli æquinoctialis cælestis, motus terræ ille quem facere æstum supposui, tanto minus augebitur, quanto motus obliquus debilius agit quam perpendicularis.

A. Satis essent hæc probabilia, si terra et stella motus tales revera haberent quos tu supponis. Sed de hoc, nec sine ratione, dubito. Nam cum aeris rejectionem, motibus hujusmodi adhærentem, causam esse dicas quod cætera corpora omnia ad terram descendant: cur non æque dicendum est, cum sol et luna aerem rejiciant, cætera corpora præter aerem omnia ad stellas omnes similiter itura, et sic solem et terram in unum corpus coalitura esse?

B. Non est necesse. Nam si duo corpora aerem a se rejiciant, reprimetur utrinque motus aeris, ita ut illa duo corpora coire non possint: nisi dicamus aerem, ab utroque simul corpore rejectum, expelli e natura rerum.

A. Videntur ergo duo astra quælibet inter se distantiam quandam tenere ab hac causa determinatam, et proinde ad se invicem propius accedere vel longius abire non posse quam pro æquilibrio virium. Videtur etiam, supposito quod poli motus hujus (considerati in sole et luna) sunt in plano æquinoctialis, motus ille solis causa esse motus terræ diurni. Atque etiam, quia motus terræ est in plano eclipticæ, terram debere motum lunæ

CAP. II. De æstibus marinis.

dare respondentem motui diurno ipsius terræ super centrum proprium in plano eclipticæ.

B. Idem videtur etiam mihi. Quid enim verisimilius esse potest, quam ut causa motus diurni terræ sit motus aliquis in sole? Et nisi volveretur luna super centrum proprium, faciem ejus aspiceremus modo unam, modo alteram: quam tamen videmus, unam semper et eandem.

A. Restat unum circa æstus marinos phænomenon omnium mirabilissimum: nempe, ingens ille fluxus qui singulis noviluniis et pleniluniis cernitur in flumine Sabrinæ, et alter in contraria parte Angliæ in litore agri Lincolniensis. Quam putas hujus phænomeni esse causam?

B. Causa æstuum nostrorum communis, sicut ante dixi, est partim aqua illa, quæ fertur per mare Atlanticum versus Septentriones: partim illa quæ, influens in fretum Anian et partem Asiæ et Europæ Borealem circumfluens, tendit rursus in Austrum per mare Germanicum et Hibernicum, et facit ut aqua maris in illis locis altissime se elevet. Atque hinc necessario accidit, ut in ostiis fluminum, quæ et ampla sunt et directe obvertuntur locis ubi aquæ ab hoc concursu æstuum accumulantur, fluxus majore quam alias impetu fiat. Sinus autem ad ostium Sabrinæ mari Atlantico, et sinus ille alter in agro Lincolniensi, mari Germanico directissime obvertuntur, ambo magni existentes. Ego tanti æstus qui aliter fieri possunt, non intelligo. Quas autem causas* harum rerum philosophi Collegii Greshamensis causas* reddunt hisce probabiliores?

A. De causis adhuc omnino silent. Illud tuum

---

* Sic edit. 1662 et 1668.

de obice oceani aquam impediente ne procedat, sed revertatur, memini legisse me alicubi in scriptis Cancellarii Baconis.

CAP. II. De æstibus marinis.

B. Ita est: sed motus aquæ causam adscribit motui diurno primi mobilis, qui motus primi mobilis, cum sit in circulo cujus centrum est centrum terræ, propellere aquam non potest. Etiam Galileus causam æstuum horum terræ motui cuidam adscribit: quem motum terra habere non potest, nisi sol, terra, et luna solido aliquo vinculo connecterentur, tanquam in fune pendulo totidem pilæ plumbeæ.

CAP. III.

PROBLEMATA DE VACUO.

A. Ad probandam universi plenitudinem, nullum nostin' argumentum cogens?

B. Imo multa. Unum autum sufficit: ex eo sumptum, quod duo corpora plana, si se mutuo secundum amborum planitiem communem tangant, non facile in instante divelli possunt; successive vero facillime. Non dico impossibile esse duo durissima marmora ita cohærentia divellere, sed difficile; et vim postulare tantam, quanta sufficit ad duritiem lapidis superandam. Siquidem vero majore vi ad separationem opus sit quam illa qua moventur separata, id signum est non dari vacuum.

A. Assertiones illæ demonstratione indigent. Primo autem ostende quomodo ex duorum durissimorum corporum conjunctorum ad superficies exquisite læves diremptione difficili, sequitur plenitudo mundi.

CAP. III. De vacuo.

B. Si duo plana, dura, polita corpora, ut marmora, collocentur unum supra alterum, ita ut eorum superficies se mutuo per omnia puncta exacte, quantum fieri potest, contingant: illa sine magna difficultate ita divelli non possunt, ut eodem instante per omnia puncta dirimantur. Veruntamen marmora eadem, si communis eorum superficies ad horizontem erigatur, aut non valde inclinetur: alterum ab altero facillime, ut scis, etiam solo pondere dilabentur. Nonne causa hujus rei hæc est: quod labenti marmori succedit aer, et relictum locum semper implet?

A. Certissime. Quid ergo?

B. Quando vero eadem uno instante divellere conaris, nonne multo major vis adhibenda est? Quam ob causam?

A. Ego, et mecum puto omnes causam statuunt, quod spatium totum inter duo illa marmora divulsa simul uno instante implere aer non potest, quantacunque celeritate fiat divulsio.

B. An qui spatia in aere dari vacua contendunt, in illo aere solo dari negant qui marmora illa conjuncta circundat?

A. Minime, sed ubique interspersa.

B. Dum ergo illi qui marmor unum ab altero revellentes aerem comprimunt, et per consequens vacuum exprimunt, vacuum faciunt locum per revulsionem relictum: nulla ergo separationis erit difficultas, saltem non major quam est difficultas corpora eadem movendi in aere postquam separata fuerint. Itaque quoniam, concesso vacuo, difficultas marmora illa dirimendi nulla est: sequitur, per difficultatis experientiam, nullum esse vacuum.

A. Recte quidem illud infers. Mundi autem

CAP. III. De vacuo.

plenitudine supposita, quomodo demonstrabis possibile omnino esse ut divellantur?

B. Cogita primo corpus aliquod ductile, nec nimis durum, ut ceram, in duas partes distrahi: quæ tamen partes non minus exacte in communi plano se mutuo tangunt quam lævissima marmora. Jam quo pacto distrahatur cera, consideremus. Nonne perpetuo attenuatur, donec in filum evadat tenuissimum, et omni dato crasso tenuius: et sic tandem divellitur? Eodem modo etiam durissima columna in duas partes distrahetur, si vim tantam adhibeas quanta sufficit ad resistentiam duritiei superandam. Sicut enim in cera partes primo extimæ distrahuntur, in quarum locum succedit aer: ita etiam in corpore quantumlibet duro aer locum subit partium extimarum, quæ primæ vulsionis viribus dirumpuntur. Vis autem quæ superat resistentiam partium extimarum duri, facile superabit resistentiam reliquarum. Nam resistentia prima est a toto duro, reliquarum vero semper a residuo.

A. Ita quidem videtur consideranti quam corpora quædam, præsertim vero durissima, fragilia sint. Cæterum de duritie interrogabo te alio tempore. Ad vacuum nunc revertor. Quas causas, sine suppositione vacui, redditurus es illorum effectuum qui ostenduntur per machinam illam quæ est in Collegio Greshamensi?

B. Machina illa eosdem effectus producit, quos produceret in loco non magno magnus inclusus ventus.

A. Quomodo ingreditur istuc ventus? Machinam nosti cylindrum esse cavum, æneum: in quem protruditur cylindrus alius solidus ligneus, corio

CAP. III.
De vacuo.

tectus, quem suctorem dicunt, ita exquisite congruens, ut ne minimus quidem aer inter corium et æs intrare (ut putant) possit.

B. Scio. Et quo suctor facilius intrudi possit, foramen quoddam est in superiore parte cylindri, per quod aer (qui suctoris ingressum alioqui impedire posset) emittatur. Quod foramen aperire possunt et claudere quoties usus postulat. Est etiam in cylindri cavi recessu summo datus aditus aeri in globum concavum, vitreum: quem etiam aditum clavicula obturare et aperire possunt quoties volunt. Denique in globo vitreo summo relinquitur foramen satis amplum, (clavicula item claudendum et recludendum), ut in illum quæ volunt immittere possint experiendi causa. Tota denique machina non multum differt, si naturam ejus spectes, a sclopeto ex sambuco quo pueri se delectant imitantes sclopetos militum, nisi quod major sit, et majore arte fabricatus, et pluris constet. Suctorem autem intrudunt et revellunt (quia vi magna opus est) non manibus semper, sed sæpius cochlea ferrea. Sed quid vides tu in tanto apparatu et artificio, quod probet dari vacuum?

A. Video, si suctor trudatur usque ad fundum cylindri ænei, obturenturque foramina, sequuturum esse, dum suctor retrahitur, locum in cylindro cavo relictum fore vacuum. Nam, ut in locum ejus succedat aer, est impossibile.

B. Credo equidem suctorem cum cylindri cavi superficie satis arcte cohærere ad excludendum stramen et plumam, non autem aerem neque aquam. Cogita enim quod non ita accurate congruerent, quin undequaque interstitium relinqueretur quantum tenuissimi capilli capax esset. Retracto ergo

CAP. III. De vacuo.

suctore, tantum impelleretur aeris quantum viribus illis conveniret, quibus aer propter suctoris retractionem reprimitur: idque sine omni difficultate sensibili. Quanto autem interstitium illud minus esset, tanto ingrederetur aer velocius. Vel si contactus sit, sed non per omnia puncta, etiam tunc intrabit aer, modo suctor majore vi retrahatur. Postremo etsi contactus ubique exactissimus sit, vi tamen satis aucta per cochleam ferream tum corium cedet, tum ipsum æs: atque ita quoque ingredietur aer. Credin' tu possibile esse duas superficies ita exacte componere, ut has compositas esse supponunt illi: aut corium ita durum esse ut aeri, qui cochleæ ope incutitur, nihil omnino cedat? Corium quanquam optimum admittit aquam, ut ipse scis, si forte fecisti unquam iter vento et pluvia ὑόμενος καὶ ἀήμενος. Itaque dubitare non potes quin retractus suctor tantum aeris in cylindrum, adeoque in ipsum recipiens incutiat, quantum sufficit ad locum semper relictum perfecte implendum. Effectus ergo qui oritur a retractione suctoris, alius non est quam ventus: ventus, inquam, vehementissimus, qui ingreditur undequaque inter suctoris superficiem convexam et cylindri æneі concavam, proceditque, versa clavicula, in cavitatem globi vitrei, sive, ut vocatur, *recipientis*.

A. Causam video nunc unius ex machinæ mirabilibus, nimirum, cur suctor postquam est aliquatenus retractus et deinde amissus, subito recurrit ad cylindri summitatem. Nam aer, qui vi magna impulsus fuerat, rursus per repercussionem ad externa vi eadem revertitur.

B. Atque hoc quidem argumenti satis est etiam solum, quod locus a suctore relictus non est vacuus.

CAP. III. De vacuo.

Quid enim aut attrahere, aut impellere suctorem potuit ad locum illum unde retractus erat, si cylindrus fuisset vacuus? Nam ut aeris pondus aliquod id efficere potuerit, falsum esse satis supra demonstravi, ab eo quod aer in aere gravitare non potest. Nosti etiam quod, cum e recipiente aerem omnem (ut ille loquuntur) exugerint, possunt tamen trans vitrum id quod intus fit videre, et sonum si quis fiat inde audire. Id quod solum, etsi nullum aliud argumentum esset (sunt autem multa), ad probandum nullum esse in recipiente vacuum abunde sufficit.

A. Ad illud autem, quod si vesica aliquatenus inflata in recipiente includatur, paulo post per exuctionem aeris inflatur vehementius et dirumpitur, quid respondes?

A. Motus partium aeris undequaque concurrentium velocissimus, et per concursum in spatiis brevissimis numeroque infinitis gyrationes velocissimæ vesicam in locis innumerabilibus simul et vi magna instar totidem terebrarum penetrat*, præsertim si vesica antequam immittatur, quo magis resistat, aliquatenus inflata sit. Postquam autem aer penetrans semel ingressus est, facile cogitare potes quo pacto deinceps vesicam tendet et tandem rumpet. Verum si antequam rumpatur, versa clavicula, aer externus admittatur, videbis vesicam, propter vehementiam motus temperatam, diminuta tensione rugosiorem. Nam id quoque observatum est. Jam si hæc quam dixi causa, minus tibi videatur verisimilis: vide an tu, aut alius quicunque imaginari potest, quo pacto vesica distendi et rumpi possit a viribus vacui, id est, *nihili*.

---

* Sic Edit. 1662 et 1668.

A. Unde autem fit ut animalia tam cito, nimirum, in spatio quatuor minutorum horæ, in recipiente interficiantur?

B. Nonne animalia sic inclusa insugunt in pulmones aerem vehementissime motum? Quo motu necesse est ut transitus sanguinis, ab uno ad alterum cordis ventriculum interceptus, non multo post sistatur. Cessatio autem sanguinis mors est. Possunt tamen animalia, cessante sanguine, reviviscere, si aer externus satis mature intromittatur, vel ipsa in aerem temperatum, antequam refrixerit sanguis, extrahantur. Idem aer in recipiente carbones ardentes extinguit: sed et illi, si dum satis calidi sunt eximantur, relucebunt. Notissimum est, quod in fodinis carbonum terreorum (cujus rei experimentum ipse vidi) sæpissime e lateribus foveæ ventus quidam undequaque exit qui fossores interficit ignemque extinguit, sicut illorum recipiens: qui tamen reviviscunt, si satis cito ad aerem liberum extrahantur.

A. Si phialam aquæ in recipiens dimiseris, exucto aere bullire videbis aquam. Quid ad hoc respondebis?

B. Credo profecto in tanta aeris motitatione saltaturam esse aquam: sed ut calefiat, nondum audivi. Sed imaginabile non est saltationem illam a vacuo nasci posse. Spero jam certum te esse, nullum esse machinæ illius phænomenon, quo demonstrari potest ullum in universo locum dari corpore omni vacuum.

A. Mundum scis finitum esse, et per consequens vacuum esse oportere totum illud spatium quod est extra mundum, infinitum. Quid impedit quo minus vacuum illud cum aere mundano permisceatur?

CAP. III.
De vacuo.

B. De rebus transmundanis nihil scio.

A. Quid de experimento censes Torricelliano, probante vacuum per argentum vivum, hoc modo? Est, in figura, A pelvis sive aliud vas, et in eo argentum vivum usque ad B. Est autem CD tubus vitreus concavus, repletus quoque argento vivo. Hunc tubum si digito obturaveris, erexerisque in vase A, manumque abstuleris, descendet argentum vivum a C: verum non effundetur totum in pelvem, sed sistetur in distantia quadam, puta in D. Nonne ergo necessarium est, ut pars tubi inter C et D sit vacua? Non enim, puto, negabis quin superficies tubi concava, et argenti vivi convexa, se mutuo exquisitissime contingant.

B. Ego neque nego contactum, neque vim consequentiæ intelligo. Si quis in argentum vivum quod in vase est vesicam immerserit inflatam, nonne illa, amota manu, emerget?

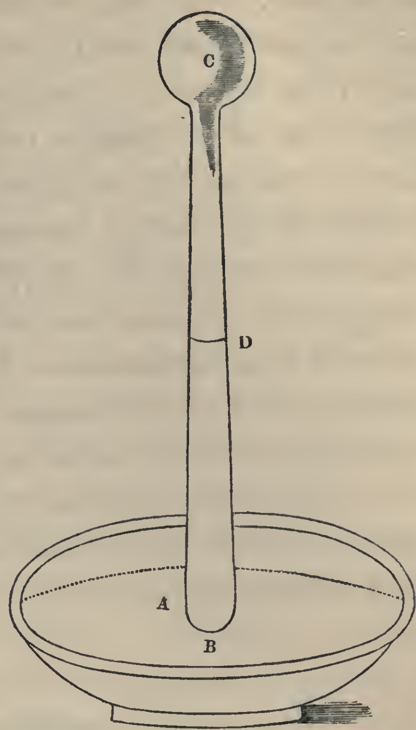
A. Ita certe, etsi esset vesica ferrea, vel ex materia quacumque præter aurum.

B. Vides igitur ab aere penetrari posse argentum vivum.

A. Etiam: et quidem illa ipsa vi, quam a pondere accipit argenti vivi.

B. Simul atque argentum vivum descenderit ad D, altius erit in vase A quam ante: nimirum, plus argenti vivi erit in vase quam erat ante descensum, tanto quantum capit pars tubi CD: tanto quoque minus erit aeris extra tubum, quam ante erat. Ille autem aer qui ab argento vivo loco suo extrusus est, (supposita universi plenitudine), quo abire potest, nisi ad eum locum qui in tubo inter C et D a descensu argenti vivi relinquebatur? Sed qua, inquies, via in illum locum successurus est? Qua,

CAP. III.
De vacuo.



nisi per ipsum corpus argenti vivi aerem urgentis? Sicut enim omne grave liquidum sui ipsius pondere aerem quem descendendo premit, ascendere cogit (si via alia non detur) per suum ipsius corpus: ita quoque aerem quem premit ascendendo, si via alia non detur, per suum ipsius corpus transire cogit. Manifestum igitur est (supposita mundi plenitudine) posse aerem externum ab ipsa gravitate argenti vivi cogi in locum illum inter C et D. Itaque phænomenon illud necessitatem vacui non demonstrat. Quoniam autem corpus argenti vivi penetrationi quæ fit ab aere nonnihil resistit, et ascensioni argenti vivi in vase A resistit aer: quando illæ duæ resistentiæ æquales erunt, tunc in tubo sistetur alicubi argentum vivum, atque ibi est D.

A. Si phialam, collum habentem longiusculum, eandemque omni corpore præter aerem vacuam, ore sugas, continuoque phialæ os aquæ immergas, videbis aquam aliquousque ascendere in phialam. Qui fieri hoc potest, nisi factum sit vacuum ab exuctione aeris in cujus locum possit aqua illa ascendere?

B. Concesso vacuo, oportuit quædam loca vacua fuisse in illo aere etiam qui erat intra phialam ante

CAP. III. De vacuo.

suctionem. Cur ergo non ascendebat aqua ad ea implenda absque suctione? Is qui sugit phialam, neque in ventrem quicquam, neque in pulmones, neque in os e phiala exugit. Quid ergo agit? Aerem commovit, et in partibus ejus conatum sugendo efficit per os exeundi, et non admittendo, conatum redeundi. Ab his conatibus contrariis componitur circumitio intra phialam, et conatus exeundi quaquaversum. Itaque phialæ ore aquæ immerso, aer in subjectam aquam penetrat e phiala egrediens, et tantundem aquæ in phialam cogit.

A. Præterea vis illa magna suctionis facit, ut sugentis labra cum collo phialæ aliquando arctissime cohæreant propter contactum exquisitissimum.

CAP. IV.

PROBLEMATA DE CALORE ET LUCE.

A. QUÆ causa est caloris?

B. Unde nosti an sit in rerum natura quicquam calidum præter teipsum?

A Quia sentio me a corporibus quibusdam aliis calefieri.

B. "Calefacit, ergo calet": non est bona consequentia. Sed quam sentis ipse corporis tui mutationem dum calescis?

A. Video cutem mihi æstate quam hyeme esse explicatiorem. Et sum quandoque debilior solito præ calore. Et sentio quasi spiritus vitales exhalare. Etiam sudo.

CAP. IV. De calore et luce.

B. Sunt ergo accidentia illa quorum causas quæris. Dixi supra, quod a motu quem in sole, terra, et cæteris astris supposui, aer dissipatur: et per consequens ni mundus plenus esset, innumerabilia essent in aere loca exigua vacua. Sed mundo pleno, proximæ partes aeris per continuam loci mutationem succedunt in locum disjectarum partium, nec vacua esse sinunt.

Cum ergo a motu illiusmodi solari aer juxta superficiem terræ, ut dixi, laceretur, nisi corporis aliquid ex ipsa terra egrediens rupturam illam resarciret, rursus ad vacuum redeundum esset. Sin aliquid ex ipsa terra egrediatur, tunc manifeste fieri per hunc motum vides, ut fluidæ partes e terra cogantur exhalare. Idemque contingit corpori humano: quod quoties homo sentit, calidum se esse dicit. Similiter, quoties terram videt aquæ terræque particulas emittere æstivo tempore in plantas, a calore solis id fieri judicat.

A. Verisimillimum est. Nec minus verisimile est, eodem modo e mari, fluminibus, et locis palustribus, maxime vero ab oceano, evocari aquæ particulas in nubes.

Calefactionis autem multæ aliæ causæ sunt præter actionem solis aut ignis. Duo ligna inter tornandum affrictu mutuo sæpissime incenduntur.

B. Manifesta hic est rursus laceratio aeris, nata a motibus duorum lignorum contrariis: atque inde necessario sequitur egressio corporis quod in illis est aerei, et, motu illo continuato, dissolutio particularum solidarum in cineres.

A. Unde fit quod homo etiam ad sudorem calefit ab omni fere labore corporis insolito?

B. Quoniam corporis humani liquores interni

CAP. IV. De calore et luce.

per laborem jactitantur, mirum non est si pars eorum aliqua etiam ejiciatur.

A. Multa sunt quæ hominem calefaciunt absque omni sudore et exhalatione, ut caustica, urticæ, et alia.

B. Proculdubio: sed non sine contactu. Non enim operantur a distantia.

A. Quomodo est calor causa lucis, idque in corporibus aliquibus magis, aliquibus minus? Sunt etiam in quibus lucem producere nunquam potest.

B. Calor non est causa lucis: sed in corporibus multis eadem causa, id est, idem motus, est utriusque tum lucis tum caloris. Non sunt ergo inter se calor et lux, ut causa et effectus, sed effectus ejusdem causæ gemini.

A. Quo pacto?

B. Apparitionem fieri lucis scis ante oculos, quacunque spectas, etiam fricando, premendo, vel percutiendo oculum. Id quod aliunde nasci non potest, quam a restitutione partium oculi pressi vel percussi ad situm naturalem. Nonne sol rejiciendo aerem oculum premit? Nonne corpora illuminata idem faciunt, licet debilius, per reflectionem? Etiam organa visionis, oculus, cor, cerebrum, pressioni aeris resistit per conatum contrarium ad restitutionem versus externa. Cur ergo non oriretur apparitio lucis ante oculos, æque ac in oculi pressione vel percussione?

A. Orietur, non nego. Sed illud quod apparet a percussione, quid est? Nihil enim nunc ante oculum est, quod non ibi erat prius. Nam si esset, videretur potius ab aliis: vel si nocte fieret, locus ubi fit illuminaretur.

B. Phantasia est; qualis est imago in speculo;

quale est spectrum; qualis est macula ante oculum a conspecto sole, vel igne candescente; quale denique est somnium. Sunt enim hæc omnia sub vexillo phantasiæ, nullis fulta corporibus, nulli corpori insidentia.

CAP. IV. De calore et luce.

A. Cur autem, quando solem aut lunam, aut aliud corpus intueris, non illa quoque spectra esse dicas, et phantasmata?

B. Etiam illorum apparitiones phantasmata esse dico. Quamquam enim sol, ut et omne corpus, realiter existat et maneat, circulus tamen ille splendidus, magnitudinis (ut videtur) pedalis, sol non est, nisi plures sint soles. Nam in vitris quæ speciem multiplicant, videres viginti soles, si species illa esset ipse sol. Est solis apparitio utroque oculo sua. Item uno oculo paulum detorto, duo fiunt soles in cœlo, vel neuter sol est. Etiam eodem tempore videtur sol in cœlo et in flumine, id est, neuter eorum sol est.

A. Siquidem hæc vera sunt, video sequuturum illa quæ a doctis appellantur accidentia corporum, præter motum et magnitudinem omnia esse phantasmata, non objectis sed sentienti adhærentia. Sed unde evenit, ut corpora a certis gradibus caloris alia candescant et luceant, alia non luceant?

B. Corpora quæ lucent omnia motum illum habent, quem supposui esse in sole et terra. Cui motui, ut fiat lux, certus requiritur gradus velocitatis, quo visionis organum satis fortiter movere possit. Omnia corpora non nimis fluida, a satis magno calore lucebunt. Ferrum, lapis, aurum ab igne vehemente lucebunt. Aqua non lucebit, quia partes ejus ante avolant quam gradum velocitatis

CAP. IV. De calore et luce.

acceperint, quantus ad commovendum videndi organum postulatur.

A. Sed corpora sunt permulta quorum partes calefactæ facile avolant, quæ tamen inflammantur et lucent : ut oleum et vinum.

B. Quod ad oleum attinet, non inflammatur per se solum sine alia materia combustibili, quantumvis calefactum. Non sunt ergo partes olei, sed materiæ oleo unctæ quæ evolantes lucent. Sunt autem in vino particulæ, quæ habent motum illum quem in terra supposui satis velocem; quæ a contactu flammæ externæ facile lucent.

A. Unde sciri potest talem motum inesse particulis vini?

B. Nunquamne tantum bibisti vini, ut lucernæ, mensæ, fenestræ, omnia commoveri tibi viderentur?

A. Aliquando, non sæpe. Memini autem ire et redire omnia motu reciprocante qualem descripsisti. Quid tum?

B. Nihil aliud, præterquam quod ejus rei causa erat vinum. Cujus particulæ habebant motus illius, quem supposui, magnum gradum: quem auxit fortasse nonnihil, postquam in ventriculum et venas receptæ erant, corporis humani internus calor. Atque eo motu concussæ venæ et (propter continuitatem corporis) cerebrum, faciebant ut motus ille qui erat in cerebro et nervis opticis et reliquo videndi organo, videretur tibi esse in fenestra et cæteris objectis.

A. Quid est flamma? Putavi enim illam, quæ ab exiguo straminis dum comburitur manipulo exit flamma, centies majorem esse quam erat ipse manipulus.

CAP. IV.

De calore et luce.

B. Decepit te phantasia tua. Si baculum manu tenens, cujus sit ignita pars extrema ut luceat, illam velociter moveas, sitque motus ille circularis, videbitur circulus vel arcus circuli ignitus; sin motus sit rectus, linea recta ignea, major vel minor pro ratione velocitatis et spatii quod percurritur: cujus rei causam satis nosti.

A. Causam puto esse, quod motus ab impressione prima in organo duravit usque dum ab objecto igne totus circulus, vel tota linea recta descripta esset. Ex quo necessarium erat, ut ignis ille in omnibus lineæ, sive rectæ sive curvæ, punctis simul videretur, cum ab omni parte sensum semper æqualiter excitaret.

B. Causam ipsam dixisti. Scintilla ignis, etiam minima visibilis, velociter ascendens videtur linea ignea. Propter eundem illum motum quem supposui, videtur etiam latior. Et propterea omnis flamma necessario apparet multo major, (puto plus quam centies major), quam est corpus ipsum unde exit.

A. Scintillæ quid sunt?

B. Sunt ligni, vel cujuscunque corporis inflammati, minutissima frusta: quæ frusta a motu illo primum eriguntur, deinde effringuntur et evolant cum aere una ascendente. Sed antequam evolant, si ignis extinguatur, partes illæ erectæ nec evectæ naturam habent fuliginis: et sunt combustibiles, id est, dissipabiles in frusta adhuc minutiora.

A. Etiam e frigidissimo lapide extundi potest scintilla lucens. Non videtur ergo omnis scintilla propter calorem splendescere.

B. Non: sed, ut dixi ante, calet et splendet propter illum quem toties dixi motum. Motus autem

CAP. IV. De calore et luce.

ille nunc a vi collisionis oritur. Nam scintillularum illarum unaquæque est frustulum exiguum ipsius lapidis, et vertiginem suam fomiti præparato imprimit. Atque hoc modo propagatur ignis quantum volumus.

A. Quo pacto comburit omnia fere combustibilia lux solaris, vel per refractionem in vitro convexo, vel per reflectionem a vitro concavo?

B. Pressus a sole aer premit vitrum convexum tali modo, ut actio continuetur per corpus vitri in linea recta, non eadem quæ a sole ad vitrum, sed vergente aliquanto ad perpendiculum; deinde continuata per oppositam ejusdem vitri superficiem in aerem, divergit a perpendiculo. Unde fit ut tota actio tandem in arctissimum spatium concludatur. Itaque necesse est, ut si in illo spatio collocetur materia combustibilis, ea ab actione unita, id est, a motu facto per convergentiam vehementissimo comburatur.

Eadem ratio est combustionis per reflexionem. Nam sic etiam actio tota in arctissimum spatium redigetur. Sed de his rebus fusius et accuratius tractatum est in libro quem inscripsi *De Homine.*

A. Cur non potest esse, ut sol sit corpus aliquod tale quale nos vulgo nominamus ignem, et radii ejus transire per vitri poros, eo modo ut in puncto vel fere puncto conjungantur?

B. Num dari vitrum potest quod sit totum pori? Si tale vitrum dari non potest, tum effectus ille a transitu radiorum solis per poros vitri produci non potest. Vidisti accendi combustibilia per globum solidum vitreum, quæcunque pars ejus soli obverteretur. Id quod fieri non potest, nisi vitrum totum sit pori. Præterea neque ego neque tu ignem

CAP. IV.
De calore et luce.

imaginari possumus alium quam quem vidimus, neque alium quam qui ab aqua extingui potest. Verum non modo per globum vitreum vel cristallinum solidum comburuntur combustibilia, sed etiam per globum concavum (modo et diaphanum sit) plenum aquæ. Quomodo ergo radii solis, quos supponis igneos, transire aquam possunt ut non extinguantur.

A. Nescio. Nec quicquam corporeum a sole emitti puto. Nec si emitteretur, intelligere possum quo pacto jamdudum sol ipse non consumptus fuerit.

CAP. V.

PROBLEMATA DE DURO ET MOLLI.

A. Quid durum appellas, quid molle?

B. Durum appello ego, et mecum omnes, corpus illud cujus pars loco suo non facile dimovetur nisi cedente toto. Corpora cætera appello mollia. Adeo ut durities et mollities sint altera alterius gradus.

A. Unde est quod corpus aliud alio durius sit, vel (quoniam gradus sunt) mollius: atque idem corpus modo durius, modo mollius?

B. Causa ejus rei est idem ille motus partium, quem a principio in sole, terra, et astris supposuimus: et unde non modo gravitatem, et maris æstus, sed etiam calorem et lucem derivavimus. Qui cum non sit circa centrum partis sed motus ipsius centri, non est semper perfecte circularis. Non enim a circulatione est quod aer laceratur, et

CAP. V.

De duro et molli.

cæteri effectus producuntur, sed a reciprocatione in linea quacunque.

Pro causa ergo duritiei suppono reciprocationem illam et velocissimam esse, et intra spatia brevissima.

A. Conceptu difficile est. Utinam hæc visibili aliquo experimento emollire velles.

B. Quando tensam vides, exempli causa, ballistam: putasne partes ejus moveri?

A. Minime. Scio omnes quiescere.

B. Quomodo hoc scire potes? Nullo certe argumento, præterquam quod moveri non cernis. Vides quidem laminam totam quiescentem: credendumne ergo est quiescere etiam partes ejus omnes internas, cum tot sint argumenta quæ evincunt contrarium?

A. Quo argumento motum inesse evinces in partibus laminæ chalybeæ, dum manet tensa?

B. Si nervum quo tenetur tensa discindas, aut quocunque modo a vi tendente liberes, protinus motum laminæ videbis velocissimum, quo se restituet ad situm unde vi tensionis dimota erat. Motus hujus quæ causa est?

A. Ipsa nervi laxatio, vel laminæ utcunque liberatio a vi tendente.

B. Quod si laminæ non tensæ, sed tamen curvissimæ, capita nervo connecterentur, deinde discinderetur nervus: non credes laminam illam tunc recursuram esse ad situm rectiorem. In quo ergo consistit differentia?

A. Laminæ tensæ, elastrum quoddam intus inest: laminæ vero sine tensione curvæ, elastrum nullum est.

B. Quid est elastrum?

CAP. V.

De duro et molli.

A. Per elastrum intelligo partium internarum conatum restituendi se ad situm, a quo per tensionem abductæ fuerant.

B. Conatus quid sit non plus intelligo, quam quid sit elastrum.

A. Per conatum intelligo principium motus in lamina tensioni contrarium.

B. Sed principium motus quantumvis insensibile, tamen motus est. Scis autem nihil esse quod principium motus sibi ipsi dare potest. Quid ergo laminæ tensæ et quiescenti conatum dedit ad situm priorem revertendi?

A. Ille dedit qui ipsam tetendit.

B. Fieri non potest. Ille enim conatum prorsum dedit: sed conatus hic est retrorsum.

A. Concedatur conatum esse motum, et motum illum esse in partibus internis laminæ semper sive tensæ sive non tensæ: quo pacto inde infers, quod necessarium sit, simulatque a vi tensionis liberatur, ut ea ad situm pristinum restituatur?

B. Hoc pacto. Cum sit in partibus laminæ motus qualem dixi, invisibilis quidem sed tamen velocissimus, etiam ante tensionem, motus ille qui ante tensionem fiebat secundum longitudinem quam habuit ab ictibus malleorum chalybe adhuc candente, tensam nunc ad eundem situm continuo urget. Itaque ablato impedimento, ad situm priorem laminam restituet.

A. Sed antequam removeatur impedimentum, conatus ille nullumne effectum producet? Nam conatus ille motus est; et motus omnis effectum aliquem habere debet.

B. Etiam, effectum aliquem habebit; nempe hunc, ut tempore fiat, longo inquam tempore, ut conatus

CAP. V.
De duro et molli.

ille procedat secundum longitudinem laminæ, non ut ante tensionem, sed ut tensæ. Atque inde fiet, ut, sublato impedimento, restitui tamen sine eadem vi qua ante tendebatur non possit.

A. Ita est. Nam ballista quæ diu tensa mansit, conatum se restituendi debilitatum tandem propter partium resistentiam perdit. Sed ab hoc interno partium motu reciproco quomodo infers totius duritiem?

B. Si cuilibet illarum uni vim applicaveris, necesse est ut partes reliquas commoveris, antequam illa una sensibiliter moveatur. Totum ergo cedet, aut illa pars sensibiliter non cedet. Corpus autem cujus pars non cedit nisi cedente toto, durum est.

A. Corpora dura ab igne liquescunt aliqua, non tamen omnia. Unde hoc?

B. Durissima corpora illa sunt, in quibus partium motus et velocissimus est, et intra spatia brevissima. Itaque si ignis, in quo motus partium valde velox est, sed in spatiis majoribus, satis vehemens sit ad superandam duri resistentiam, faciet ut partes duri motum suum exerceant in spatiis majoribus, et proinde ut resistant minus, id est, durum emollibit: quando autem in tantum emolliuntur dura, ut suo ipsorum pondere diffluant, tunc liquifieri illa dicimus.

A. Unde accidit ut durissima quæque fragilissima sint?

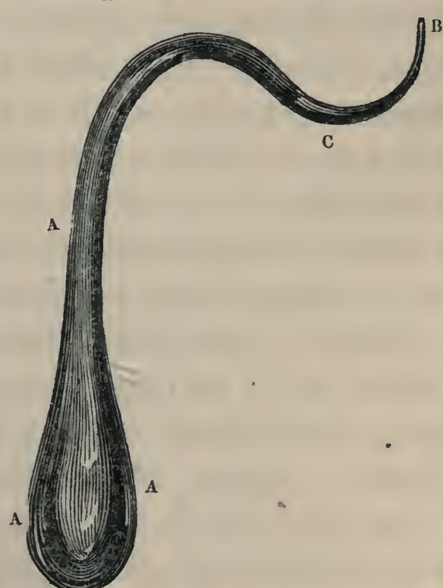
B. Quando durum aliquod, exempli causa, virgam ferream flectimus, spatia in quibus fit motus ille partium non augemus, ut facit ignis. Sed partes alias in convexitatem distrahimus, alias in cavitatem comprimimus: idque in uno præsertim puncto. In quo puncto, vel quasi puncto, si resistentia virgæ

ferreæ a vi flectente superetur, proximarum partium cohæsio subito vincitur, victæ fere antequam pars extima frangeretur.

CAP. V. De duro et molli.

A. Vidi vitrum figuram habens qualem hic appictam habes: nempe, AABC solidam. Cujus si partem BC effringas, totum in pulverem discutietur. Causam phænomeni tam insignis scire cupio, verisimilem saltem.

B. Experimentum vidi. Causam, primo, figuræ dicam. Virgam ferream vitro liquefacto, quod intra fornacem in vase continetur, intingunt. A virgæ termino pendebit gutta vitrea, liquefacta quidem, sed tamen satis tenax, similis lachrimæ: quam excidere in aquam sinunt. Inde oritur cauda illa ACB: qua rupta, in aquam incidit, primo, grandis illa gutta AA; et statim sequitur cauda ACB, et casu curvatur. Gutta ergo AA extinguitur prima, et post guttam cauda: idque successive, extinctione a fundo incipiente. Cognita jam corporis hujus vitrei generatione, videamus quid ab ea inferri potest.



Quoniam pars AA prima extinguitur, motus in ea partium, qui ab igne in majoribus spatiis ferebatur, ab aqua cogetur in spatia minora: et proinde motus partium versus B velocior fiet.

A. Quid ita?

B. Si sumas virgam e ferro, aut materia dura

CAP. V. De duro et molli.

quacunque homogenea, et illius terminum quidem alterum manu teneas, terminus autem alter calefiat dum candescat, poteris eam etiam sic illæsus tenere. Verum si simul teneas et partem candentem subito extinguas, manus tibi ita vehementer uretur, ut tenere illam diutius non possis.

A. Nota res est.

B. Vides ergo, ut motus partium ab A versus C et B vehementior multo factus sit quam ante, atque etiam in spatiis arctioribus propter extinctionem partium inferiorum: utque omnis motus partium inferiorum unitus sit paulatim in puncto B. Atque hinc fieri credo, ut cauda illa BC, quanquam exilis, difficillime tamen frangatur. Quoniam autem motus hic in omnibus vitri particulis non solum circularis est, sed etiam propagatur in longitudinem a fundo A ad cuspidem B: propter reactionem vaporum ex aqua calefacta in guttam AA agentium, totus motus spiralis fiet, et per illum diffindetur et torquebitur materia vitrea ab imo ad summum in fila vitrea innumerabilia, ut fiunt in arboribus a succo surgente quo nutriuntur fila lignea.

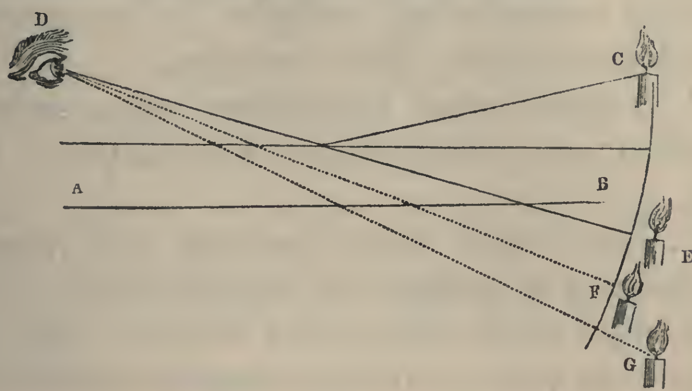
Itaque, si caudam illam ACB flectas (exempli causa) in C: id quod majorem requirit vim, quam quis facile crederet: fila illa vitrea omnia simul flectes. Atque eadem flexa tenebuntur, donec rupto vitro in C simul omnia liberentur. Tum vero subito simul omnia resilient (velut arcus fragilis et nimium tensus, rupto nervo) in particulas innumerabiles.

A. Nihil verisimilius. Et natura, si in alia re ulla, in hac se prodidit, et in illa de restitutione laminarum in ballistis. Quo phænomeno suppositio

CAP. V.
De duro et molli.

tua de motu illo reciprocante partium minutissimarum in duris, plane videtur mihi demonstrata.

Est et in speculis vitreis (quod sæpius animadverti) ex quo suppositio eadem non parum confirmatur: nimirum, inesse in vitro motum illum quem dicis conatum partium internarum.



Esto enim speculum vitreum AB: sitque objectum in C, candela: oculus ad D. Jam a refractionibus et reflectionibus pluribus ad utramque superficiem, (si prima incidentia satis sit obliqua), multas simul videbis candelæ imagines, ut E, F, G, ordine ut hic describuntur. Cæterum si oculum ad C, candelam ad D transferas, apparebunt imagines illæ ordine non eodem quo ante erant. Quod tamen manifestius cognoscetur, si speculum sit coloratum, ut rubrum vel cæruleum. Sed causam ejus nullam imaginari potui ante hunc diem. Nunc autem fieri posse puto a conatu illo per fila, ut in ligno. Quem conatum acquirere potuit vitrum in fusione et refrigeratione, per eam viam qua vitrum candens fundebatur.

B. Corporum durorum plurimæ species sunt, metalla, lapides etc., quæ in visceribus terræ sunt et fuerunt a creatione universi: et præterea, li-

CAP. V. De duro et molli.

quores et succi diversi qui indurari possunt. Causa autem quæ ex non duris dura efficit universalis, alia puto esse non potest præter motum aliquem, non totius, sed partium minimarum, et illum ipsum quem dixi. Quod si quis motum alium (nihil enim mutatur nisi per motum) ad hunc effectum producendum excogitaverit aptiorem, et monstraverit: ad illius sententiam libens accedam.

A. Scimus aquam indurescere etiam oceani, in partibus non nimium remotis a mundi polis. Unde sit?

B. Nosti solem versari semper intra tropicos, aeremque a se semper (ut supposuimus) a se rejicere, atque etiam idem facere terram. Itaque fieri non potest quin ab utroque magnus nascatur aeris motus versus utrumque polum, superficiem terræ et maris semper radens. Ab hac rasione necesse est ut partes illæ terræ et aquæ circellos suos quos faciunt contrahant, id quod est *durescere:* et primo quidem in superficie cuticulam induere, quæ est glacies prima: postea vero, eodem motu perseverante, cuticulam aliam aliamque, cooperante etiam glacie prima: donec tandem evadat glacies crassissima.

A. Si ita est, non opus est ut interrogem, quo pacto fiat ut aquæ urceus a nive sali mixta, etiam æstate, non procul ab igne congeletur. Sale enim et nive circundato urceo, e liquescentibus illis aer sive ventus exprimitur, qui radens undequaque urcei superficiem extimam, motum partium ejus in spatia arctiora redigit: et sic actione ad interna propagata, aqua tandem quæ intus est indurescit. Sed unde contingit ut aqua in puteo profundo raro congeletur?

CAP. V.

De duro et molli.

B. Quia puteus profundus est instar urcei magni, cujus superficiem extimam radere aer non potest, nisi terra, qua circundatus est urceus, valde sit spongiosa.

A. Cur non congelatur vinum, sicut aqua?

B. Etiam vinum congelabitur, si frigus magnum sit et diuturnum. Sed motus internus partium vini, sicut et multorum aliorum liquorum, fortior est, et in majoribus circulis, quam motus partium aquæ: et propterea minus facile indurescit, præsertim usque ad centrum. Partes enim vini quarum est motus ille fortis, recipiunt se ad centrum. Vini autem quod illic est, reliquo congelato, fortissimum est.

CAP. VI.

PROBLEMATA DE PLUVIA, VENTO, ALIISQUE CŒLI VARIETATIBUS.

A. Quid pluviam efficit, et quomodo?

B. Motum aeris (qualem ante descripsi), conantem ad partium aeris diremptionem, necessario sequitur conatus perpetuus (quia locus vacuus nullus est) omnium partium fluidarum quæ sunt in superficie telluris, ad illa loca supplenda quæ alioqui essent vacua. Hinc fit, ut maris et terræ partes fluidissimæ et minutissimæ surgentes aeri se immisceant: quæ collectæ fiunt nubes. Harum pars maxima inde oritur ubi maxima est aquæ quantitas, nimirum, a partibus oceani maximis, quæ sunt mare Indicum, mare Australe, et mare

CAP. VI.

De pluvia, vento, aliisque cœli varietatibus.

quod novum a veteri mundo separat, Atlanticum: supra quæ maria sol rectior incedit quam supra cætera, et propterea majorem inde elevat aquæ quantitatem. Quæ cum in nubem coaluerit, descendit rursus in pluvia.

A. Si sol aquam, ut dicis, elevat, cur non et sustinere potest ne recidat?

B. Etiam sustineret, credo, nisi multæ partes concurrentes pondere suo vim elevantem superarent.

A. Quæ causa est concursus?

B. Quicquid lationi earum se opponit, et tantisper retinet dum aliæ supervenerint, ut montes vel ventus. Præterea, quando feruntur versus polos, ubi vis solis propter obliquitatem minor est, unde descendunt paulatim pondere suo. Sed quia pondus illud tendit ab omni parte ad centrum terræ, necessario coguntur descendendo in spatium arctius, et guttulæ contactu crescunt.

A. In altissimis montibus cur tam sæpe ningit, tam raro pluit?

B. Quia vapores elevati supra summos montes, ubi motus aeris est liberrimus, ab illo motu aeris congelantur, antequam in guttas majusculas, quales faciunt pluviam, uniantur. Guttulæ autem sic congelatæ sunt nix.

A. Cur tam raro pluit in Ægypto, cum tamen in locis æquatori propioribus pluvia tanta sit ut inde Nili oriatur inundatio?

B. Causa, ut dixi, descensionis pluviæ una, et forte maxima, est collectio et in nivem inspissatio vaporum circa montes magnos, quæ Lunæ Montes appellantur: præcipue vero existente sole prope æquinoctialem, qui aquam tunc potentissime elevat,

CAP. VI. De pluvia, vento, aliisque cœli varietatibus.

et a majoribus maribus. Montes autem illi in quibus sunt Nili scaturigines, maximos esse constat, et sub æquatore, et prope mare Indicum. Mirandum ergo non est, si in illis montibus maxima sit nivis copia. Quæ nix liquescens Nilum auget, cujus aqua mensibus Aprilis et Maii descendit versus Ægyptum, et illic elevatur, maxime circa solstitium æstivum: itaque terram inundat.

A. Cur ergo non inundat bis in anno, id est, quoties sol est in æquatore?

B. Ab æquinoxio autumnali progreditur sol ad tropicum Australem, ut nivem in lateribus montium qui Ægyptum spectant liquefacere non possit.

A. Oportet autem ut sit inundatio similis ex parte montium Australi.

B. Descensus quidem aquarum major profecto debet esse, quia major est liquefactæ nivis copia. Inundatio autem nulla esse potest, nisi inundaretur mare Indicum, quod montes illos alluit.

Quod ad causam attinet cur tam raro pluit in Ægypto, eam esse puto, quod valde magni montes prope Ægyptum nulli sint in quibus nubes sisti possunt. Montes enim unde Nilus oritur, distant inde circiter 2000 mille passuum. Qui proximi sunt ab uno latere, sunt montes Nubiæ: ab altera parte, Sina et montes Arabiæ satis dissiti.

A. Unde oriuntur venti?

B. Præcipue, ut videtur, a motu nubium. Partim etiam a re quacunque in aere mota.

A. Nubes a ventis ferri manifestum est. Videris ergo effectum ponere ante causam.

B. Si nubem movere nihil posset præter ventum, objectio illa bona esset. Sed nubem gravitate sua descendere posse certissimum est. Quando autem

CAP. VI.

De pluvia, vento, aliisque cœli varietatibus.

sic descendit, fieri non potest quin aerem ante se usque ad superficiem terræ propellat, et rursus a terra repellatur idem aer: unde ventos fieri necesse est quaquaversum, qui nubes alias in quas incidunt propellent.

A. Esto. Sed nubium motus tardus quomodo ventos efficit tam veloces?

B. Non unius aut duarum nubium, sed multarum plerumque et magnarum effectus est ventus magnus. Præterea, facto jam vento, cogitur aer sæpissime in loca nubibus jam ante camerata: et propterea ventorum vis ab angustia loci maxime augetur.

A. Cur Auster magis quam alii venti pluviam adfert?

B. Ubi sol est potentissimus, et maria amplissima, id est, in partibus terræ (respectu nostri) australibus, ibi plurima est in aere aqua, quam ad nos adferre solus Auster potest. Verum imbres magnos vidi etiam aliquando a vento boreali, sed in æstate: ita ut nubes illas allatas prius ab Austro, et præterlatas, putarem a Borea relatas esse.

A. Vidi aliquando navigans undas ingentes, et magnam maris concussionem, cum tamen nullus omnino perciperetur ventus.

B. Quid autem paulo post?

A. Plusquam voluimus, procellam ingentem, idque intra minus quam quartam partem horæ.

B. Id est, ventus ante veniebat, post aderat. Venientem autem percipere non potuistis, quia motus aeris tendebat, propter descensum nubium, deorsum: qui aer ab aqua reflectebatur sursum, et, donec vicinus erat, supra vela. Itaque ventum non sentiens, non esse existimabas.

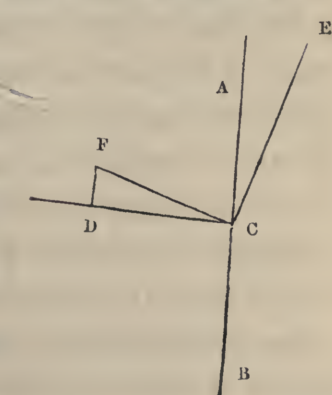
CAP. VI.

De pluvia, vento, aliisque cœli varietatibus.

A. Qui fieri potest ut navis a vento acta, progrediatur tamen aliquando in eadem linea recta, quasi a vento non impulsa sed attracta?

B. Scire prius oportet, quod corpus omne in aliud corpus impingens, sive perpendiculariter sive oblique incidens, semper tamen agit in linea quæ est ad superficiem corporis in quod incidit perpendicularis. Exempli causa: pila ferrea e sclopeto in parietem missa, eam aliamve materiam ita impellit, ut pars icta recedere cogatur in linea quæ est ab superficiem perpendicularis. Nam si via pilæ sit ad parietem obliqua, motus ejus componetur ex duobus motibus, altero ad parietem parallelo, altero perpendiculari. A quorum motuum primo nullus in pariete effectus esse potest. Ictus ergo totus erit a motu altero, nempe perpendiculari: quare pars parietis percussa recedet in linea perpendiculari sola. Nec nisi ita esset, ulla esset ictus obliqui et perpendicularis differentia quoad vim. Quod falsum esse sciunt omnes.

A. Quomodo autem hæc ad navem transfers?



B. Sit AB navis, prora A. Jam si ventus spiret ab A versus B, progredi navis non potest, quomodocunque obtensum sit velum. Sit CD ad navem perpendicularis, sitque velum EC oblique tensum, in quocunque angulo ECA. Sitque CF perpendicularis ad EC. Vides ergo progressuram navem pro ratione CA ad DF.

A. Ita est. Sed si ventus fere contrarius esset,

id est, si angulus ECA valde exiguus esset, navis credo tardius iret in linea CA, quam lateraliter.

B. Tardius certe tanto iret, quo ventus esset magis contrarius: sed navis lateraliter tardius ibit quam credis. Nam motus ad latera duæ causæ sunt: quarum altera est ventus ille qui incidit in ipsum latus navis; altera est veli sinuatio. Quarum causarum prima nihil fere efficit, quia pondus aquæ quod a latere navis propellendum est, maximum est: secunda motum navis in anteriora aliquantum impedit.

A. Quod navis motus lateralis, nisi in longissima navigatione, non multum impediat facile concedo: sed veli sinuationem accelerare navem credidi, potius quam impedire.

B. Error est. Nam impedit: minus tamen quando ventus a puppe spirat.

A. Videtur ergo, si tabula aliqua lata, eademque tenuis, pro velo vento obtenderetur, commodiorem fore: quia minus sinuatur quam velum ex lino.

B. Vela lignea quot incommoda secum allatura sunt, facile providere licet, etiam absque experientia. Expertum tamen vidi in velo ligneo quid efficere ventus potest. Vidi enim tabulam ligneam quatuor trochiscis impositam, et in medio ejus pro malo erectum baculum, et baculo affixam aliam tabulam instar veli; atque ita collocatam, ut ventus in eam incideret obliquissime; nempe, in angulo multo minore quam est angulus in præcedente figura ACE, id est, ita ut esset in situ ad ventum fere contrario. Tabula hæc cum velo suo ligneo in pavimento sub dio, spirante vento mediocri, collocata est. Evenit autem, ut primo immota paulisper

et quasi dubitabunda staret, sed non diu: deinde subito et velociter procurreret, donec a scabritie pavimenti everteretur.

CAP. VI. De pluvia, vento, aliisque cœli varietatibus.

A. Antequam relinquamus navem, dic mihi qui fit ut exiguo gubernaculo maxima navis a cursu suo deflectatur.

B. Id fit non solo gubernaculo. Navis a gubernaculo in aqua stagnante converti non potest, neque in aqua naturaliter profluente, modo navis libera et soluta sit. Opus est profluente per vim externam vel venti vel remorum. In tali profluente si gubernaculum ad aquam labentem a prora ad puppim oblique teneatur, actio aquæ in ipsum impingentis non obliqua erit, sed, ut supra ostensum est, perpendicularis: unde necesse est ut navis a cursu deflectatur, atque ita deflectatur ut prora tendat in eam regionem ad quam inclinatur in puppe gubernaculum. Animadvertisti credo, in flumine Tamesi, exigua quædam descendere navigia a partibus Angliæ occidentalibus, per flumen nondum ita profundum ut prope urbem: quorum gubernacula latiora multo sunt quam gubernacula maximarum navium. Quare hoc, nisi ut aquam multam sustineant, quæ in non profundo flumine intercipienda est prope aquæ superficiem?

A. Quæ causa est nivis?

B. Eadem quam, cum loqueremur de duritie, supposui pro causa duritiei. Motus enim ille quem supposui in tellure et sole aerem rejicientibus, magnum aeris conatum efficit a Zona Torrida utrinque versus polos. Qui aer per nubes nondum gravidissimas transiens, guttulas, ex quibus nubes constat, radendo congelat, eodem plane modo quo

CAP. VI.

De pluvia, vento, aliisque cœli varietatibus.

aquam maris et fluminum congelari dixi. Guttulæ autem sic congelatæ sunt nix.

A. Quomodo ergo congelantur guttæ majores, maxime vero tempore æstivo, in grandinem?

B. In æstate maxime contingit ut nubes constent ex maximis guttis, utque maxima copia aquæ elevetur. Itaque spatio inter terram et nubes arctiore facto, motus aeris tanto fit velocior: et proinde guttas illas congelat non in ipsis nubibus, sed a nubibus cadentes. Nec tamen totas congelat, (quod cadendi exiguum tempus non patitur), sed in superficie tantum: ut manifestum est, ex eo quod multo quam glacies aut nix citius liquefiunt.

A. Cur non aliquando nubes, etiam integræ gravidæque, congelantur in unam magnam glaciei molem?

B. Ita, credo, congelantur quoties tonat.

A. Sed quare ita credis?

B. Propter ipsum sonum, qui proprie *fragor* dicitur: sonum dico, qualem efficit duorum corporum diffractio. Qui fragor quomodo fieri possit in corpore non duro, intelligere non possum.

A. Imo, pulvis ille quem appellant aurum fulminans, mollis est. Attamen si æquabiliter calefiat, fragorem edit similem tonitrui.

B. Sed pulvisculi illius particulæ singulæ per se, cur non possunt esse duræ, etsi totus cumulus mollis sit: quemadmodum arenæ acervus mollis est, quanquam granum ejus unumquodque durum est? Sales omnium generum similes sunt glaciei, et fragiles ut glacies. Etiam ut fiat aurum fulminans, dissolvitur aurum ope nitri et salium aliorum: et granum unumquodque auri fulminantis per se, si in ignem injiciatur, crepitat, id est, fragoris sonum

CAP. VI.

De pluvia, vento, aliisque cœli varietatibus.

imitatur. Quare si fiat ut granorum cumulus simul crepitet, necesse est ut fragor magnus sit.

A. Sed antequam aurum fiat fulminans, dulcificatur, ut chymistarum verbo utar: id est, sal eluitur, et deinde paulatim desiccatur.

B. Id est, aqua evaporatur, sal relinquitur: saltem aliquantum, quod siccatum indurescit. Non ergo ab auro fragor ille, sed a sale esse potest. Sunt enim pulveres etiam alii quibus aurum nullum inest, qui tamen calefacti sonum edunt non minorem quam aurum fulminans. Chymista quidam nostri temporis affirmat, quod sal tartari et nitrum cum paululo sulfuris mixta, et in pulverem redacta, et calefacta, fragorem efficiunt quantum facit sclopetus militaris qui musquettus appellatur.

A. Videtur mihi operæ pretium facturus, qui experiri vellet quantum effectum haberent pulveris istius (auri inquam fulminantis) plures simul libræ in magno sclopeto poliorcetico, gradatim a favilla calida calefactæ.

B. Idem sentio.

A. Quid est id quod nubes, ut dicis, congelatas frangit?

B. Quando dies calidi sunt, sol magnam excitat copiam vaporum tum e mari, tum etiam e locis omnibus palustribus. His vaporibus pendentibus assurgunt alii aliique. Sæpe autem dum pars ascendit et pars descendit, nubes fiunt spissæ et simul cavernosæ, per quas expressus aer multis in locis transiens nubes congelat, eo quem sæpius dixi modo indurans.

A. Id concessum ante est. Quæro autem, non unde in glaciem concrescunt, sed a qua causa postquam durescant diffringuntur.

CAP. VI.

De pluvia, vento, aliisque cœli varietatibus.

B. Suppositio hic adhibenda est nova.

A. Non omnia ergo continet pelvis.

B. Quid ita? Suppositio enim quam adjuncturus sum, non obstabit: quæ hæc est, quod motus ille quem supposui in terra, sole, et astris, est etiam in eorum minimis particulis. Nam si motus talis in tellure revera insit, quare dubitabimus an insit etiam in singulis partibus ejus seorsim? Nam totum et partes ejusdem sunt naturæ. Si pars aliqua terræ quantulacunque sublata esset e rerum natura, num ideo motus ille tolleretur in parte reliqua? Si magnetem frangas, unaquæque pars ejus virtutem totius retinebit, quanquam pro ratione magnitudinis diminutam. Cur ergo idem non fiet in particulis terræ?

A. Supponatur. Atque etiam, quod simul cum aqua (nam video quo tendis) multæ in nubes elevantur a calore solis atomi terreæ. Quid inde sequitur?

B. Si nubes gravidæ permultæ, aliæ ascendentes aliæ descendentes, concurrant, faciantque per concursum concavitates plenas aere, et concursu continuato spatia illa cava coarctent, ita ut ab expressi aeris motu fiat glacies: necesse est ut atomi illæ terreæ, quæ aquam non tam facile penetrant, relinquantur in illis cavitatibus, minoribus tandem quam pro ratione spatii quod illarum motus postulat. Itaque alteræ in alteras impingent, et motu inde aucto glaciem subito, modo hic modo illic, rumpent, et sese liberabunt, tonitrua et fulgura facientes pro numero carcerum effractorum. Fulgur enim phantasia est ab actione aeris in oculum.

A. Sæpe etiam sereno cœlo nec tonante fulgur vidi, præsertim vespere.

B. Nimirum, quando nubes et pluvia sunt infra horizontem in loco unde videri nubes non poterant, nec audiri tonitrua.

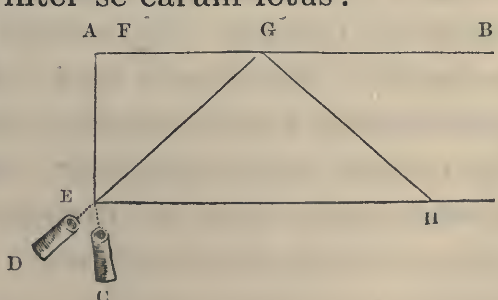
CAP. VI. De pluvia, vento, aliisque cœli varietatibus.

A. Nubes congelari primus supposuit Cartesius: et inde contingere aliquando, ut plurima fragmenta glaciei situm inter se talem habeant, ut tanquam totidem specula plures imagines solis in oculum reflecterent.

CAP. VII.

PROBLEMATA DE MOTU PERPENDICULARI ET OBLIQUO: REFRACTO ET REFLEXO: DE PRESSIONE ET PERCUSSIONE: DE TRACTIONE ET PULSIONE.

A. Si pila a dato puncto parietem feriat perpendiculariter, et rursus ab eodem puncto eundem parietem oblique, quænam erit ratio virium inter se quibus parietem urgent? Exempli causa, sit paries AB, datum punctum E, sclopetus CE, a quo emittatur pila perpendiculariter ad F. Sitque sclopetus alter DE, a quo emissa pila incidat in parietem ad G oblique, sed velocitate pari. Quam rationem habebunt inter se earum ictus?



B. Vis ictus perpendicularis erit ad vim obliquam in ratione rectæ EG ad rectam EF.

A. Qui fieri potest ut tanta sit dif-

CAP. VII.

De motu perpendiculari, etc.

ferentia? Num virium suarum tantum perdere in tantillo spatio potest, quantum est EG?

B. Minime. Supponemus enim nullam omnino perire partem velocitatis. Sed causa differentiæ est, quod, velocitate utriusque pilæ existente æquali, altera ad parietem citius quam altera perfertur, in ea temporum ratione quam habet EG ad EF. Quanquam enim utriusque pilæ consideratæ absolute velocitas eadem sit, considerata tamen in ipsarum accessu ad parietem major est illa in EF quam in EG, in ratione ipsarum EF, EG.

A. Quando pila non penetrat parietem, sed ab eo repercutitur, angulusne idem fit cum pariete dum repercutitur, qui erat cum incideret: ut fieri deprensum est in radiis solaribus?

B. Si angulos mensuraveris prope parietem, differentia sensibilis non erit, quæ alioqui erit satis magna. Motus enim pilæ perpetuo a repercussione languescit: quod non fit in reflectione radiorum solarium.

A. Quænam est causa repercussionis? Corpus enim quod procedere non potest, motum suum perdidit. Unde ergo nascitur motus ille repercussionis?

B. Motus repercussionis, sicut et reflectionis, oritur a parietis resistentia. Inter reflectionem luminis et pilæ consideranda differentia est, respondens motibus differentibus pressionis et percussionis. Actio enim qua reflectitur lumen, est pressio aeris, sive cujuscunque medii diaphani, contra corpus unde reflectitur; quam efficit sol, vel aliud corpus lucens vel illuminatum; nec alia res est præter conatum contrarium in reflectente. Ut quando viri duo pectoribus premerent duos baculi

CAP. VII. De motu perpendiculari, etc.

terminos, etsi alter alterum non removeret, uterque tamen inveniret in seipso aptitudinem satis magnam retrocedendi, atque etiam reprimendi quicquid corporis a tergo est. Talis est natura reflectionis, quantum attinet ad lumen. Jam si radii solares oblique incidant, actio tamen est ad superficiem in quam incidunt perpendicularis. Itaque paries sive corpus quodcunque reflectens, resistendo motum illum retrovertit perpendiculariter, ut ab F ad E: sed a vi quæ est in parallela per EH, quia motus ille parietem non premit, nihil aufert. Atque hoc pacto duo illi motus, quorum alter est ab F ad E, alter ab E ad H, componunt unum motum in recta GH, quæ facit angulum cum BG æqualem angulo incidentiæ FGE.

Sed in percussione, qualis est motus pilæ contra parietem, quam primum pila repercutitur, partem velocitatis suæ amittit, vergetque ad terram suo pondere. Ita ut anguli quos faciunt incidentes et repercussi, æquales esse non possint, nisi mensurentur prope punctum parietis in quo facta est percussio.

A. Si tabula erigatur super planum aliquod, etsi dejici facile potest etiam a solo digito pressus*, pila tamen a musquetto eam non dejiciet sed transadiget. Quam ob causam?

B. Dum tabulam digito dejicis tempus consumitur, dum motus, quem parti imprimis quam digito tangis, cæteris partibus omnibus communicari possit. Alioqui enim non dejicietur: totum enim, nisi omnibus partibus motis, dejici non potest. Pilæ autem percussio tanta fit celeritate, ut partem

---

* Sic edit. 1662 et 1668.

CAP. VII.

De motu perpendiculari, etc.

in quam incidit ante perrumpat quam cæteris partibus, quas necesse est simul cadere, communicari possit.

A. Ictus mallei clavum profunde in lignum et subito adiget. Quodnam pondus capiti ejusdem clavi impositum, usque ad eandem profunditatem adiget, et quanto tempore? Problema enim est, quod sæpius audivi discussum inter physicos.

B. Differentia quæ est inter modum quo operatur pondus, et modum quo operatur ictus, facit ut calculus sit difficillimus. Nam ictus ad unum quasi punctum ligni, celeritate sua resistentiam cæterarum partium antevertit: unde clavus facilius ingreditur. Sed pondus nec tempus resistendi prævenit, et resistentiam auget. Sed quantum et quanto tempore, illud est quod determinare impossibile esse puto.

A. Quænam est differentia in* reflectionem et recursum, qualem experimur in tormentis bellicis?

B. Repercussio omnis, proprie loquendo, recursus est: at non e contrario omnis recursus est repercussio. Repercussio semper fit a reactione corporis percussi: sed recursus non semper. Recursus enim non fit premendo pulverem nitratum, sed a vi flammæ, quæ accenso pulvere quaquaversum æqualiter movetur.

A. Recursum illum natum esse putaram ab aere in canonem redeunte postquam flamma et pila explosæ essent. Nam ut loci tantum, quantum vacuum propter explosionem relinqueretur, tam subito aere intrante per foramen exiguum illud quo pulvis accendebatur, impleri posse non putaram.

B. Flamma illa nihil aliud est præter pulverem

* Sic edit. 1662 et 1668.

ipsum, qui dissipatus in partes minutissimas, videntur, propter splendorem, majorem molem habere quam revera habent. Et ad mensuram qua semper magis dissipantur, plus aeris per pulveris partes dissipatas subingreditur. Etiam per foramen illud exiguum unde pulvis accenditur, ingreditur aer. Qui duo motus cum sint in aere contrarii, motus ex illis compositus minor erit quam ut tormentum possint repellere.

CAP. VII. De motu perpendiculari, etc.

A. Audivi asserentes sclopetum, magis vel minus justo oneratum, pilam semper ita ejicere ut signum nunquam feriat, sed semper a signi latere aberrare: sed oneratum certa quadam pulveris quantitate, nunquam errare.

B. Quomodo id ita esse possit, non intelligo. Quando enim quæ in causa sunt omnia æqualia sunt, effectus inæquales esse non possunt. Simul atque pulvis ignescit, et antequam pila ejecta sit, sclopetus recurrere incipit. Causa ergo esse debet in manu illius qui sclopetum tenet, vel (si sit tormentum bellicum) in terra cui insistit propter inclinationem vel scabritiem. Causam aliam hujus eventus imaginari non possum.

A. Unde oritur refractio?

B. Quando actio fit in recta ad superficiem corporis pressi vel percussi perpendiculari, refractio omnino nulla erit. Propagabitur enim actio in linea perpendiculari. Verum si pressio vel percussio sit obliqua, refringetur actio in eam partem quam natura corporis, per quod actio propagatur, determinabit.

A. Quomodo refringitur lumen?

B. Si actio procedat per corpus quod minus, in corpus quod magis resistit, et ad punctum superficiei in quam incidit rectam ducas perpendicularem,

CAP. VII.

De motu perpendiculari, etc.

procedit actio non per lineam incidentiæ continuatam, sed in alia, ad perpendicularem convergente.

A. Cur ita?

B. Ostendi ante quod incidentia operatur tantum in perpendiculari. Sed simul atque actio procedit ulterius versus interna, operatur partim in perpendiculari, partim in incidente continuata: propterea quod major jam facta resistentia motum illum in incidente continuata debilitat, et convertit versus perpendicularem.

A. In corporibus diaphanis verum esto. Sed sunt corpora multa per quæ transire lumen omnino non potest.

B. Actio quidem per quam fit lumen, nullum non corpus permeat. Nam actio hæc pressio est. Quicquid autem premitur, premit id quod proxime a tergo est: et hoc aliud, in infinitum. Lumen autem corpora quædam non permeat. Nam partium quorundam corporum internarum tanta est inæqualitas et differentia quoad figuras, ut actio in transitu innumeris refractionibus et reflectionibus ita debilitetur, ut antequam permeaverit, debilior fiat quam ut in organo videndi visionem producere possit.

A. Si corpus diaphanum fuerit, et actio propagetur in corpus quod minus resistat: exempli causa, a vitro in aerem: qua via tendet in illo aere?

B. A puncto unde operatio exit, ducatur ad superficiem vitri recta perpendicularis. Actio jam a resistentia quam passa erat liberata, diverget a perpendiculari quantum ad perpendicularem ante convergebat.

A. Quando pila plumbea sclopeto emissa per aerem, penetrat murum terreum, etiamne tunc fiet refractio versus perpendicularem?

CAP. VII. De motu perpendiculari, etc.

B. Si terra omnis sit ejusdem generis, fiet refractio versus perpendicularem. Nam etiam tunc motus parallelus in primo ingressu a resistentia debilitabitur.

A. Unde fit ut pila, si in fluvium mittatur valde oblique, penetretque, repercutitur tamen in aerem?

B. Quando pila valde oblique emittitur, quanquam motus velox sit, accessus tamen ad aquam deorsum tardus est. Et cum accesserit, aquam ante se multam pellit cogitque assurgere; quæ aqua pondere proprio statim deorsum tendit; unde fit ut aqua subter ipsam pilam ascendat, idque cum ea vi quæ satis sit descensum pilæ in aqua superare, et sursum pellere, eo modo quo fieri solet in reflectione.

A. Quo motu (quoniam effectus omnes motui ascribis) ferrum ad se trahit magnes?

B. Eodem motu quem supposuimus ante in terra. Quanquam autem partes minimæ terræ omnes talem habeant motum, non tamen suppositum est earum reciprocationes æquales esse, neque iisdem temporibus perfici, neque super polis iisdem, aut parallelis. Nam si ita esset, corpora omnia æqualiter se mutuo attraherent. Nam consensus talis motus, viæ, velocitatis, et polorum, fieri non potest absque conjunctione ipsorum in centro motus eorum communi.

Itaque si ferri natura cum natura magnetis ita conveniat, ut motum similem ejus qui est in magnete, facile recipiat, eo modo quo lyræ chorda recipit motum alterius chordæ similiter tensæ: id quod verisimile est, quia magnes species quædam est mineræ ferreæ: necesse est post motum magnetis receptum, ut ferrum ad magnetem, nisi impe-

CAP. VII.

De motu perpendiculari, etc.

diat magnitudo ponderis, admoveatur: propterea quod motus eorum, dum inter se distant, tempore differentes se mutuo cogent ad centrum aliquod commune. Quod si ferrum ad magnetem ascendat, opus erit ut aut majore vi, aut majore propinquitate, pondus ferri lapis vincat; tunc vero ferrum ad magnetem assiliet tanta velocitate, quanta ab eadem altitudine descenderet ad terram. Sed si tum lapis tum ferrum super aquam natet, attractio visibilis erit in majore distantia: propterea quod impedimentum quod est in pondere aliquatenus removetur.

A. Unde est quod magnes dum natat non quiescit, donec se præcise in meridiano collocaverit?

B. Non se semper collocat in meridiano, sed ubique fere cum deviatione aliqua. Causam autem esse puto, quod axis motus magnetici parallelus semper est axi eclipticæ: nimirum, axi motus similis in terra, extra quem situm motu suo gaudere non potest.

A. Consensus motuum in terra et magnete unde oritur? Credin' illis qui terram aliud non esse dicunt, quam magnum magnetem?

B. Gilbertus, eorum qui de magnete scripserunt probabiliter primus, sic putavit. Cartesius tellurem ejusdem naturæ esse censuit cum cæteris astris, (excepta summa ejus scabie non valde profunda), et splendescere. Ego nihil definio. Magnetis autem virtutem oriri credo ab habitu in ipsa minera longissimo tempore acquisito, propter situm in aliquo meridiano, vel potius in aliquo circulo maximo eorum qui transeunt per polos eclipticæ, qui poli iidem sunt cum polis motus similis quem in terra supposuimus.

CAP. VII.

De motu perpendiculari, etc.

A. Si ita est, non opus est ut te interrogem cur limatura ferri, imposita magneti in distantia quidem ab ipsius polis utrinque æquali, jacebit axi parallela: in aliis autem locis inclinabitur ad polum magnetis sibi proximum. Nec quare, si obelisco ferreo magnes affricetur ductu continuo, obeliscus ille eosdem habebit polos. Neque cur magnes et ferrum, sive duo magnetes, super aquam natantes alter ad alterum ita se applicet, ut eorum axis sit communis, et poli similes in eandem regionem spectent; et per consequens similes poli se mutuo repellant. Nam omnia hæc oriri possunt ab unione motuum.

PROPOSITIONES XVI DE MAGNITUDINE CIRCULI.

AD LECTOREM CYCLOMETRIÆ STUDIOSUM PRÆFATIUNCULA.

Ne multitudine linearum in diagrammate a legendo deterreare, monendus es, rationem circumferentiæ circuli ad diametrum demonstratam esse a constructione prima, constante ex lineis satis paucis, et facile distinguendis. Habes ergo quod promittit titulus, in duabus primis propositionibus plene præstitum. Si tamen propositionum cæterarum pulchritudo, ut illarum etiam demonstrationes legere et examinare velis, suadeat, a lineis reliquis minorem habebis molestiam: et quanto plus progredieris, tanto semper viam invenies procliviorem.

CONSTRUCTIO I.

CONSTRUCTIO. Describatur quadratum ABCD, et dividatur in quatuor quadrata æqualia a duabus rectis EF, GH, se mutuo secantibus in I; ducanturque diagonales AC, BD. Centro A, radio AB ducatur arcus quadrantis BD, secans rectam EF in K, et rectam GH in *k*, et AC in P; itaque arcus BD sectus erit bifariam in P. Ducatur DK secans AC in O, et producatur ad BC in M. In producta BC sumatur CL æqualis CM. Item in DC sumatur recta

CN æqualis CL vel CM; jungaturque BN, quæ secabit DL in diagonali AC ad O. Ducatur quoque AK secans diagonalem BD in V, et HG in *q*, et BN in *v*, et producatur ad BC in *w*. Per punctum O ducatur recta RS parallela BC, secans AB in R, et CD in S, ducaturque AS secans FE in *u*, et producatur ad ductam DM. Producatur item RS ad eandem DM in Z. CONSTRUCTIO.

PROPOSITIO I.

Producta AS incidet in M.

Quoniam enim angulus BCN sectus est bifariam a CO; erit ut BC ad CN sive CM, ita BO ad ON. Sed ut BO ad ON, ita est (propter triangula BOR, NOS similia) RO ad OS; et quia anguli OCS, COS sunt æquales, erunt quoque tum rectæ SZ, CS, OS, tum RO, DS, SV (propter triangula KAD, KVO similia) inter se æquales. Quare ut BC ad CN vel CM, ita est DS ad SC. Et componendo ut DS ad DC sive BC, ita est BC ad BM. Sunt ergo BM, BC (sive AB) et DS continue proportionales. Producta ergo AS transibit per M.

PROPOSITIO II.

Recta BM æqualis est arcui BD.

Ducatur per O recta *rs* parallela DC, secans AD in *r* et BC in *s*. Cum ergo sit ut DS ad SC ita BC (id est DC) ad CM, et componendo ut DS ad DC ita BC vel DC ad BM, per præcedentem; erunt B*s*, BC, BM continue proportionales; atque etiam earum potentiæ, nempe potentia B*s*, potentia BC, potentia BM erunt continue proportionales. Sed potentia BC tripla est potentiæ CL sive CM. Quare potentiæ rectarum B*s*, BC, BM sunt in ra-

PROP. II. tione 3 ad 1 continua. Centro C radio CM describatur arcus quadrantis MN; item radio DS describatur arcus quadrantis ST, et radio SC describatur arcus quadrantis CZ.

Quoniam ergo potentia DC tripla est potentiæ CM, erit potentia arcus ST tripla potentiæ arcus CZ; et arcus BD æqualis arcubus ambobus ST et CZ. Est autem potentia totius arcus BD tripla potentiæ arcus MN; et a tota BM ut semidiametro, descriptus arcus quadrantis M*m* æqualis erit utrique simul arcui BD, MN. Est ergo ut BC (recta composita ex B*s* et *s*C, quarum potentiæ sunt ut 3 ad 1) ad arcum BD (compositum ex arcubus ST, CZ, quorum potentiæ sunt ut 3 ad 1), ita arcus BD ad arcum M*m* (compositum ex arcubus BD et MN, quorum potentiæ item sunt ut 3 ad 1). Sunt ergo recta BC, arcus BD, et arcus M*m* continue proportionales.

Sed recta BC est semidiameter circuli, cujus perimetri arcus BD est pars quarta. Quare recta quæ est æqualis arcui BD, erit semidiameter circuli cujus perimetri arcus M*m* est pars quarta. Est ergo BM æqualis arcui BD.

Coroll. Sequitur hinc rectam quæ æqualis est arcui CZ, radium esse circuli descripti a CM, ideoque arcum CZ æqualem esse rectæ CM, et arcum ST æqualem esse rectæ BC.

PROPOSITIO III.

Recta PC dupla est differentiæ inter semidiagonalem et semiradium, eademque media proportionalis inter CM et ipsius semissem.

Diagonalis enim AC dividit arcum BD bifariam in P. Ducatur QP sinus rectus arcus BP, com-

pleaturque quadratam AQPx; et producatur QP ad DC in o, et xP ad BC in y, eritque oy quadratum, et Ho differentia inter Do et DH, id est inter semidiagonalem et semiradium. Ducta autem recta LN, erunt anguli CLN, CPy, yCP, CPo semirecti æquales. Transibit autem LN per P; quare erunt Ly, yC, Po, Co, oN, omnes inter se æquales; et unaquæque earum semissis rectæ CL sive CM, eademque æqualis differentiæ inter DC et Do vel QP. Est autem Co ad Ho ut DC ad Do, vel ut Do ad DH, vel ut CP ad Co. Quoniam ergo CL est æqualis duplæ Co, erit CP dupla Ho, eademque media inter Co plus oP (id est CM) et ipsam Co. PROP. III.

LEMMA.

Si numeri integri quotlibet proportionaliter minuantur in ratione 2 ad 1, maximus omnium consequentibus omnibus cum assumpta unitate erit æqualis. Exempli causa, in numeris 16. 8. 4. 2. 1, consequentes omnes simul sumpti sunt 15, cui addita unitas facit ut sit æqualis maximo 16. Item in his 8. 4. 2. 1, consequentes simul sumpti sunt 7: quem numerum addita unitas facit æqualem maximo 8. Quod si numeri quotcunque minuantur in ratione 3 ad 1, tunc consequentes omnes simul sumpti cum dimidio minimi, æquales erunt dimidio maximi; ut in his numeris 27. 9. 3. 1, maximus 27 duplus est $9+3+1$ addito $\frac{1}{2}$, qui numerus est $13\frac{1}{2}$, semissis maximi; et in his $27+9+3$ et addito $\frac{3}{2}$, consequentes una cum $\frac{3}{2}$ sunt semissis maximi 27. Sin numeri quotlibet proportionaliter minuantur in ratione 4 ad 1, consequentes simul omnes una cum tertia parte minimi erunt tertia pars maximi: ut in his numeris $16+4+1$ addito $\frac{1}{3}$, consequentes simul

omnes cum $\frac{1}{3}$ faciunt $5\frac{1}{3}$, quæ est tertia pars maximi 16. Causa autem hujusmodi proportionum obscura non est. Nam numeri bisectione, quamquam infinities bisecti, nunquam devenietur ad nihilum, sed restabit semper unitas ; neque trisectio perpetua numerum quemquam reducet ad nihilum, sed restabit semper pars aliqua.

PROPOSITIO IV.

Quadrata a rectis lineis, quæ æquales sunt arcui *ab* cæterisque consequentibus usque ad punctum M, simul sumpta, æqualia sunt quadrato ex PC sive *kp*.

Quadratum enim ex PC latus habet quod est medium inter IP et ipsius duplum, id est (per prop. iii) inter CM, sive arcum CZ, et ipsius semissem. Sed quadratum ex *ab* cum consequentibus quadratis ex cæteris arcubus omnibus terminatis in *b*M, sunt (per lemma præcedens) dimidium quadrati ab arcu CZ. Quare quadratum quod illis omnibus est æquale, habebit pro latere mediam proportionalem inter arcum CZ, id est rectam CM, et ipsius semissem. Media autem illa est ipsa recta PC, nempe dupla rectæ GQ, quæ differentia est inter AG et AQ. Dico præterea, quadrata arcuum eorundem una cum quadrato ab arcu CZ dimidium facere arcus ST, sive rectæ BC ; et proinde quadratum quod illis omnibus est æquale, habere pro latere rectam AQ mediam inter AB et AG.

Coroll. Et propterea, quadrata ex omnibus illis arcubus, assumpto quadrato ab arcu ST, (quod quadratum æquale est quadrato ABCD), æqualia esse duobus quadratis simul a radiis AB et AQ, cujus latus erit recta ducta a puncto D ad punctum

Q; cujus rectæ DQ quadratum æquale est sex quadratis a semiradio AG; ac proinde ipsam DE ductam, æqualem esse diagonali quadrati cujus latus est G*k* vel F*k*, quarum utravis potest triplum ejus quod potest AG. Etiam (propter eandem rationem) quadrata omnia rectarum SZ, Y*b*, una cum consequentibus simul omnibus per rectam SM scandentibus, simul sumpta, faciunt dimidium quadrati a recta DS; et proinde quadratum quod illis omnibus æquale est, pro latere habet mediam proportionalem inter DS et ipsius semissem. Semissis autem ejus est recta F*u*.

PROPOSITIO V.

Recta AO est media proportionalis inter AB et quatuor quintas partes ipsius AB. Recta autem DS media est proportionalis inter AB et duas quintas ejusdem AB.

Ducatur AE, secans RO in *n*: in quam demittatur perpendicularis BX. Quia ergo triangula ABE, AXB angulum habent ad A communem, et angulos ad B et X rectos, erit ut AE ad AB, ita AB ad AX. Sunt ergo AE, AB, AX continue proportionales. Ducta autem X*f* secante AB in *f* ad angulos rectos, erunt etiam similia triangula AXB, A*f*X. Habent enim angulum ad A communem, et angulos ad X et *f* rectos. Ducto igitur arcu *fh* secante AC in *h*, erunt tres arcus BP, *e*O, *fh* continue proportionales. Sunt etiam continue proportionales BM, AB, RO sive DS. Ut ergo arcus BD, sive recta BM ad AE, ita est reciproce (propter AB mediam in utroque analogismo) AX ad RO.

Intervallo AX intelligatur descriptus arcus quadrantis, secans AC alicubi; eritque ut arcus BD

ad arcum descriptum ab AE, ita arcus descriptus ab AX ad DS vel RO. Erit etiam ut semissis arcus BD ad semissem arcus descripti ad AE, ita semissis arcus descripti ab AX ad RO. Transibit ergo arcus ab AX per punctum O. Sed AO media est proportionalis inter duplam AR et rectam RO. Est autem eadem AO media proportionalis inter AB et quatuor ejus quintas; et propterea potest vicecuplum ejus quod potest pars quinta radii AB; id est, quadratum ab AO est ad quadratum ABCD ut 4 ad 5. Quare quadratum ab RO est ad quadratum ABCD ut 2 ad 5.

Coroll. i. Sequitur hinc, si ducatur recta *gd* parallela BC, secans AB in *g*, illam *dg* mediam esse proportionalem inter A*g* et ipsam *dg*; et proinde utramvis earum æqualem esse dimidio arcus per BD, id est æqualem esse arcui BP.

Coroll. ii. Quia A*d* potest quintuplum ejus quod potest semiradius BE, poterit *dg* quintuplum ejus quod potest quarta pars radii AB; et ambæ simul in unam rectam compositæ possunt decem semiradios; sequitur eam quæ potest decem semiradios, æqualem esse arcui BD.

PROPOSITIO VI.

Recta DS æqualis est duabus quintis arcus BD.

Cum enim DS (per præcedentem) media sit proportionalis inter AB vel DC, et duas ipsius quintas, erit arcus ST media proportionalis inter arcum BD et duas quintas partes ejusdem arcus. Sunt autem continue proportionales duæ quintæ radii AB vel DC, recta DS, recta DC, arcus BD; continue etiam proportionales duæ quintæ arcus BD, totus arcus ST, et arcus BD. Sed in utroque or-

dine arcus idem ponitur BD, arcus autem ST æqualis est rectæ DC. Est ergo etiam DS æqualis duabus quintis arcus BD. PROP. VI.

Coroll. Semissis ergo rectæ DS æqualis est quintæ parti arcus BD. Quare si semissis DS (id est, F*u*) quintuplicetur, tota æqualis erit rectæ BM: et proinde arcus M*m* æqualis est quintuplæ BE. Cum enim arcus ST æqualis sit rectæ AB, erit arcus quadrantis descripti a dimidia DS æqualis rectæ BE, et arcus descriptus a dimidia DS quintuplicata æqualis quintuplæ BE.

PROPOSITIO VII.

Semissis arcus BD (nempe BP), recta QP (quæ media est proportionalis inter AB et AG), et RO sive DS, sunt continue proportionales. Quoniam AB media est proportionalis inter arcum BD et rectam DS vel RO, eademque media proportionalis inter AC diagonalem, et ejusdem semissem, nempe AI, erit ut arcus BD ad diagonalem AC, ita reciproce AI ad DS vel RO; et per consequens, ut BP semissis ipsius arcus BD ad AI, ita AI semissis AC ad eandem DS vel RO. Sunt ergo arcus BP, recta QP (sive AI), et DS sive RO, continue proportionales. Sunt autem tres arcus BP, *e*O, et *fh* continue proportionales. Nam B*f* est quinta pars lateris AB, et A*f* quatuor quintæ ejusdem AB; et proinde *fh* est duæ quintæ arcus BD, quam æqualem esse rectæ RO ostensum est in corollario præcedentis propositionis. Cum ergo arcus *e*O medius sit proportionalis inter arcum BP et arcum *fh*, erit arcus *e*O medius proportionalis inter arcum BP et rectam RO; et proinde æqualis rectæ QP; sunt ergo arcus BP, recta QP, et recta RO continue proportionales.

PROP. VII.

Coroll. Quia ergo recta *gd* et arcus BP sunt æquales, erunt *gd*, QP, RO continue proportionales.

PROPOSITIO VIII.

Ut radius BC ad semissem arcus BD, ita est DS vel RO ad semiradium GI. Cum enim RO, AB, BM (sive arcus BD), sunt continue proportionales, erit ut AB ad semissem BM (id est, ad arcum BP), ita RO ad GI semissem lateris BC.

PROPOSITIO IX.

Recta AE æqualis est arcui quadrantis descripti radio AI vel AQ.

Cum enim arcus quadrantis descripti radio DS vel RO æqualis sit lateri AB, et R*n* sit dimidia RO, arcus quadrantis descripti ab R*n* vel ab *n*O erit æqualis semiradio BE. Quare arcus quadrantis descriptus a subtensa A*n* æqualis erit subtensæ duarum rectarum AB, BE, id est, rectæ AE. Ostensum autem est quod AE, sive A*d* est media proportionalis inter arcum BD et ipsius semissem BP; et manifestum est arcum quadrantis descripti ab AQ vel AI medium esse proportionalem inter eosdem arcus BD et BP, cum ipsa AQ sit media proportionalis inter AB et AG: sequitur ergo rectam AE, et arcum quadrantis descripti radio AQ vel AI, esse inter se æquales.

PROPOSITIO X.

Recta CO æqualis est subtensæ arcus BK.

Ducatur subtensa BK, et producatur indefinite. Erunt ergo puncta O et V in eadem recta RO. Triangulum autem OKV est æquilaterum; et AK secabit rectam B*k* bifariam et ad angulos rectos

in *v*. Erit ergo *v*K æqualis ipsi KE. Quare recta BK dividit angulum CBN bifariam; et tum angulus CBK, tum angulus KBN, est tertia pars anguli EBD. Itaque anguli KBN, NBV sunt æquales, et divisi ad agulos rectos in *v*. Sunt ergo latera BK, BV inter se æqualia. Sed BV æqualis est OC. Ergo OC æqualis est ipsi BK, subtensæ arcus BK. PROP. X.

Coroll. Est ergo recta SC vel SO media proportionalis inter chordam arcus 30 graduum, et ejusdem chordæ semissem.

PROPOSITIO XI.

Producta BK transibit per punctum *d* in diagonali AC, et secabit rectam SZ in Z; eritque BZ æqualis diagonali AC vel BD.

Producatur BN ad arcum M*m* in *t*; et a puncto M demittatur perpendicularis M*c*, secans B*t* productam in *c*. Quoniam ergo recta B*t* et arcus BD sunt æquales, et AK, DM parallelæ, et recta KV divisa bifariam et ad angulos rectos in *v*; recta DM secabit rectam B*t* ad angulos rectos in τ; eruntque Dτ et τZ æquales. Producta ergo BK incidet in Z. Est enim ut VK ad K*v*, ita DZ ad Zτ.

Rursus quia radius BC triplum potest ejus quod potest CN vel CM, etiam media proportionalis inter BC et semissem ejus BE, quæ est recta AI, triplum poterit ejus quod potest media proportionalis inter CN sive CL et semissem ejus. Semissis autem rectæ CL ostensa est P*o* vel C*o*; et proinde PC media est proportionalis inter CL et semissem ejus C*o*. Sed BI sive AI potest triplum rectæ PC, id est (propter triangula BCN, BI*d* similia) triplum rectæ I*d*. Transit ergo BZ per punctum *d*.

Coroll. i. Recta G*g* est æqualis rectæ BQ. Cum

PROP. XI. enim æquales sint PC, I*d*, dempta communi P*d*, restabunt IP, C*d* æquales: unde sequitur G*g*, BQ, quæ ipsis IP, C*d* sunt æquales utraque utrique, æquales etiam esse inter se.

Coroll. ii. Recta GQ est æqualis rectæ B*g*. Duæ enim G*g*, B*g*, compositæ faciunt totam BG.

Coroll. iii. EK vel H*k* æqualis est HS. In triangulo enim æquilatero KVO, quia recta VK dupla est rectæ EK vel H*k*, etiam recta VO dupla erit ejusdem EK vel H*k*. Est autem eadem dupla rectæ HS, quia IO est quadratum cujus latus est æquale HS. Itaque juncta S*k*, et producta ad DA in *i*, æqualis erit rectæ AO sive rectæ A*e*.

SCHOLIUM.

Ex iis quæ hactenus demonstrata sunt, facile est cuivis rectæ datæ aliam rectam invenire, quæ habet ad illam rationem semidiametri ad arcum quadrantis circuli, illa semidiametro descripti. Exempli causa, si sit data recta R*n*, et quæratur recta æqualis arcui quadrantis descripti semidiametro R*n*, ducatur a centro circuli A recta A*n*, et producatur ad BM in E, erit BE æqualis arcui descripto ab R*n*. Similiter si quæratur recta linea æqualis arcui quadrantis descripti a lineola *n*V, ducatur AV et producatur ad BM in *w*, eritque E*w* vel EL æqualis arcui quadrantis descripti ab *n*V. Item si data recta qualibet in recta BM, quæratur arcus circuli ipsi æqualis, invenietur hoc modo. Sit data recta AE; sumatur in BM recta B*a* æqualis AE, et ab *a* demittatur perpendiculariter recta *a*ϐ, secans AM in ϐ, et a puncto ϐ ducatur ϐQ parellela lateri BC, erit arcus quadrantis descripti ab AQ æqualis rectæ Qϐ sive AE.

Proponatur invenire rectam æqualem arcui quadrantis descripti a majore segmento lateris AB secti extrema et media ratione. Semidiametro AG describatur arcus secans AE in δ; erit ergo δE segmentum majus lateris AB secti extrema et media ratione. Ponantur in AB, RO, AD, rectæ Aζ, Bι, Rη, Aθ singulæ æquales ipsi δE. Jungaturque $\iota\theta$ secans AM in λ, et RO in η, et ducatur recta Aη, et producatur ad BC in ε. Erit ergo recta Bε æqualis arcui quadrantis descripti radio Aζ; (quia est, ut BC ad CM, ita Rη ad Bε) : eademque æqualis arcui descripto a majore segmento Aζ, nempe arcui $\zeta\theta$, eademque majus segmentum rectæ BM divisæ extrema et media ratione in ε; et εM segmentum minus. SCHOLIUM.

Sin quæratur magnitudo rectæ Bλ, quæ est diagonalis quadrati a majore segmento Bι, eademque rectæ BD divisæ extrema et media ratione segmentum majus; cum ex eo quod sit segmentum majus difficulter vel non omnino demonstrari possit, primo mechanice illum comparo cum recta FE vel AB, et illam invenio proxime, et sine differentia sensibili, accedere ad magnitudinem rectæ FK, quæ est sinus rectus 60 graduum. Itaque juxta regulam analyticæ, suppono diagonalem Bλ esse ipsi FK æqualem. Calculum autem ineo. Quadratum ab FK æquale est sedecim quadratis a quarta sui parte. Ergo quadratum a diagonali BD æquale est 32 quadratis a quarta parte lateris AB vel FE.

Et quoniam quadratum a Bλ supponitur æquale quadrato ab FK, id est tribus quadratis a dimidia AB, id est duodecim quadratis a quarta parte AB vel EF, erit quoque quadratum a Bλ æquale duo-

SCHOLIUM. decim quadratis a quarta parte lateris AB; et lateris $B\iota$ quadratum æquale sex quadratis a quarta parte ejusdem rectæ FE.

Fiat ut 32 ad 12, ita 12 ad aliam, quæ erit $4\frac{1}{2}$.

Quoniam ergo BD, $B\lambda$, λD sunt continue proportionales, etiam earum quadrata erunt continue proportionalia. Erit ergo quadratum a λD minore segmento, æquale $4\frac{1}{2}$ quadratis a quarta parte lateris EF. Sumpta ergo $D\rho$, quæ sit latus quadrati æqualis dimidio quadrato a quarta parte lateris DA, juncta $H\rho$ erit æqualis $D\lambda$. Cum enim HD quadratum æquale sit quatuor quadratis a quarta parte lateris DA, ducta $H\rho$ erit latus quadrati quod sit $4\frac{1}{2}$ quadrati lateris DA. Quare potentia rectæ $D\lambda$ vel $H\rho$ duplicatæ erit 18, id est quadratum a $D\lambda$ duplicata erit æquale 18 quadratis a quarta parte lateris DA. Potentia ergo rectæ $B\lambda$ tripla est potentiæ $B\iota$, (cujus quadratum est 6), et sesquialtera potentiæ FK. Quare ipsæ rectæ $B\lambda$, FK, sunt æquales. Inventa ergo est magnitudo rectæ $B\lambda$.

Sequitur hinc, (per Elem. xiii, prop. 4), duplam $D\lambda$ æqualem esse rectæ quæ subtendit totam DA et minus segmentum $A\mu$. Nam quadratum subtensæ illius triplum est quadrati a majore segmento $B\lambda$ vel $A\zeta$. Quid ad hæc dicturi sunt, qui Euclidem nusquam errasse volunt? Euclides tamen lineæ rationalis extrema et media ratione sectæ utrumque segmentum lineam esse irrationalem dicit, cum et totum quadratum a DA, et quadratum utriusque segmenti, sint ut numerus ad numerum. Bene quidem ratiocinatus est Euclides, sed falso usus est principio illo primo, *punctum est*

indivisibile; et propterea, sectores, et triangula et rectangula minuta, pro lineis rectis promiscue semper numeravit; adeo ut Elementum decimum, ingenii quidem magni specimen, sed inutile, etiam magna parte incertum reddidit. SCHOLIUM.

CONSTRUCTIO CUBI.

Sit data recta quæcunque AG. Descriptoque ab ea quadrato ducatur diagonalis AI, cujus potentia dupla est potentiæ lateris AG. Rursus, e recta ad punctum I erigatur perpendicularis $I\gamma$ æqualis lateri AG, jungaturque $A\gamma$: poterit ergo $A\gamma$ triplum ejus quod potest AG. Eritque circulus descriptus ab diametro $A\gamma$, circulus maximus in sphæra in quo inscribitur cubus cujus latus est AG: eademque æqualis rectæ FK vel G*k*, quæ itidem potest triplum ejus quod potest AG. Similiter quadratum a CL tertia pars est quadrati a BC, et BC diameter sphæræ in qua cubus a CL inscribitur. Quæ proportio universaliter vera est in omni triangulo rectangulo, cujus angulus unus est tertia pars recti. Itaque DS triplum potest rectæ SO vel RV; et DO potest ejusdem quadruplum. Item AO triplum potest ejus quod potest OC, propterea quod est ut AO ad DS, ita CO ad SO vel SC.

PROPOSITIO XII.

Arcus quadrantis BD æqualis est lateri cubi circumscripti, una cum latere cubi inscripti, sphæræ cujus diameter æqualis est rectæ BC. Si enim descriptus intelligatur circulus centro I, intervallo IE; et cubus cujus unum quadratum est ABCD: circulus descriptus centro I radio IE si intelligatur

PROP. XII. transire per cubi centrum, sphæra in qua circulus ille esset maximus tanget omnia cubi latera; et propterea sphæræ circumscriptus erit. Quoniam autem latus cubi circumscripti AB potest triplum ejus quod potest CL vel CM; erit cubus a CM, is qui inscriptibilis est eidem sphæræ, cujus maximus circulus describitur semidiametro IE. Demonstratur autem ab Euclide, Elem. xiii. prop. 15.

Coroll. Sequitur hinc ductam NL esse latus tetrahedri in eadem sphæra inscripti. Potentia enim rectæ NL dupla est potentiæ CL; quare potentia BC potentiæ ejusdem NL est sesquialtera; et proinde, per Elem. xiii. 13, erit recta NL latus tetrahedri inscripti sphæræ eidem.

PROPOSITIO XIII.

Rectæ AB, Ag, AR, AG sunt continue proportionales.

Ostensum enim est (prop. 7) rectas gd, QP, RO esse continue proportionales. Ostensum etiam est (prop. 8) esse ut BC ad gd, ita RO ad GI vel AG. Sunt ergo quatuor rectæ AB, Ag, AR, AG continue proportionales.

Coroll. Sequitur hinc cubum a BC duplum esse cubi ab Ag; et cubum ab Ag duplum esse cubi ab AR, et cubum ab AR duplum esse cubi ab AG.

PROPOSITIO XIV.

Compleatur quadratum Agdz, et producatur zd ad BC in π; producaturque gd ad DC in ξ, et inter DC et Dξ sumatur media proportionalis Dω; et erit quadratum a Dω æquale circulo descripto semidiametro AG vel IH. Est enim BM æqualis

quartæ parti circuli descripti semidiametro AB, et per consequens æqualis erit perimetro totius circuli descripti a semisse rectæ AB; et habebit diametrum æqualem AB. Quare triangulum rectangulum cujus latera circa rectum angulum MBG sunt BC et BM, erit æquale circulo descripto semidiametro quæ sit semissis rectæ AB. Huic autem triangulo æquale est rectangulum sub AB et dimidia BM, id est rectangulo ABζπ; et rectangulo huic æquale est quadratum rectæ Dω, mediæ proportionalis inter AB sive DC, et dimidiam BM quæ est Dξ. PROP. XIV.

PROPOSITIO XV.

Dato quadrato invenire æqualem circulum.

Sit datum (in fig 2) quadratum ABCD cui inveniendus sit æqualis circulus. Secetur latus AB quadrifariam in E, F, et G; compleanturque quadrata partium, quæ erunt sedecem inter se æqualia; ducanturque diagonales AD, BC, secantes se mutuo in centro quadrati ad H. Centro H intervallo HE vel HG ducatur perimeter circuli secans AB in E et G, et diagonales in R et S. Secabit autem circulus latera reliqua etiam quadrifariam, transiens per puncta P, M, O, N, Q et L.

Dico circulum hunc æqualem esse quadrato ABCD. Producatur HF ad circumferentiam in T. Si ergo trilaterum AER, contentum duabus rectis AE, AR et arcu ER, æquale sit trilatero FTE contento duabus rectis EF, FT, et arcu ET, manifestum est triangulum AHF, nempe partem octavam totius quadrati, æquale esse sectori HRT, octavæ item parti totius circuli: et sic de cæteris partibus

PROP. XV. quadrati et circuli æqualibus. Sin dictorum trilaterorum alterutrum altero majus sit, circulus quadrato inæqualis erit.

Supponamus ergo trilaterum quidem contentum duabus rectis AE, AR et arcu ER majus esse trilatero EFT, contento duabus rectis EF, FT, et arcu ET: illi autem æquale esse trilaterum A*er*, contentum duabus rectis A*e*, A*r* et arcu *re*. Erit ergo recta AE major quam A*e*, et AR major quam A*r*. Et recta H*r* major quam HT, et arcus circuli *re* non major quam arcus RE. Arcus autem *re* producatur donec occurrat productæ HT in *t*. Itaque trilaterum contentum duabus rectis *e*F, F*t*, et arcu *et*, multo major erit quam trilaterum contentum duabus rectis EF, FT, et arcu ET. Quare sector H*rt* totius circuli pars octava superat triangulum AHF, octavam partem quadrati ABCD, plusquam triangulum AHT superatur a sectore eodem H*rt*. Circulus ergo per *r*, *e*, *t* major est quam quadratum ABDC. Similiter ostendi potest, si trilaterum AER poneretur minus esse trilatero EFT et (per consequens) H*r* minor quam HR, circulum descriptum radio H*r* minorem fore quam quadratum ABDC. Sunt ergo æqualia inter se quadratum ABDC et circulus cujus semidiameter est HR. Dato ergo quadrato circulus inventus est æqualis.

PROPOSITIO XVI.

Dato circulo æquale invenire quadratum.

Circulo per R, T, S inveniendum sit æquale quadratum: sit datus circulus per R, T, G. Ducatur per T latus unum quadrati illius, quod circulum circumscribit, nempe XV, dividaturque TV bifariam

in *d*, ducaturque H*d* quæ secabit arcum in E, ita ut sit sicut T*d* ad *d*V, ita FE ad EA. Sed FA dividitur quoque bifariam in E, transibit ergo H*d* per communem sectionem rectæ FA et arcus TR. Erit ergo circulo per RTG æquale quadratum descriptum super latus AB, ut in præcedente propositione demonstratum est. PROP. XVI.

Potuit ergo problema hoc demonstrari sine ope mediæ proportionalis inter semidiametrum et semissem peripheriæ circuli; nisi aliquando ea quæ prope sunt, longe quæreremus.

Diagonalis cujuslibet ex dictis sedecim quadratis subtendit decimam partem totius perimetri circuli, ita ut arcus SG sit una vigesima pars ejus, et arcus GTE tres vicesimæ partes, et rursus ER vicesima pars ejusdem, et arcus RS, quarta pars totius perimetri, quinque vicesimæ partes. Nam si HT semidiameter divisa sit extrema et media ratione in F, recta HF, majus ejus segmentum, æquale erit subtensæ arcus GP, per Elem. xiv. prop. 4.

Reddidi jam rationem omnium fere linearum in figura prima descriptarum; circulum quadrato æqualem, et circulo quadratum æquale exhibui; etiam inter totam AB et semissem ejus duas inveni medias continue proportionales, id est cubum duplicavi; quod etiam methodo alia ante feceram, ea nempe quæ sequitur; non plenioris aut clarioris demonstrationis causa, sed ut objectiones a professoribus nostris geometriæ publicis editæ, quam ineptæ sint lectori appareat.

DUPLICATIO CUBI.

Sit (in fig. 1) data AV, secta in D, ita ut AD sit dupla DV.

Quadratum ab AD, majore segmento, sit ABCD.

Sit tum BR tum AS æqualis semidiagonali AI.

Producatur CD in P, ita ut DP sit æqualis AD.

Ducatur RS et producatur.

Fiat SY æqualis DV, et jungantur RY, PV.

Ergo rectæ RY, PV erunt parallelæ et æquales.

Connectantur PY, VR secans DC in X.

Ergo PY, VR sunt æquales, et PYRV parallelogrammum.

A puncto V ad rectam PY ducatur perpendicularis VZ.

Et divisa PV bifariam in *a*, radio *a*V vel *a*P describatur semicirculus qui transibit per D et Z.

Ergo anguli YZV, ZVX sunt recti.

Divisis AB, DC bifariam in E et F, ducta EF secabit RY bifariam in *f*.

Ducatur *af* secans YV in T, et ZV in *e*.

Ergo *af* dividit parallelogrammum PYRV bifariam, et sunt tres rectæ PY, *af*, VR æquales et parallelæ.

Ducatur *a*Z, quæ est æqualis *a*V.

Ergo VZ divisa est bifariam et ad angulos rectos in *e*.

Etiam DS divisa est bifariam in T.

Ergo circulus descriptus radio TV vel TY transibit per Z.

Jungatur YX secans *af* in *i*. Et *i*T dimidio YZ, eademque dimidia XV, et YZ, XV æquales. Secta autem est PX a recta *a*T bifariam, quia *fi* est dimidia RX*.

Et anguli VYX, ZVX in semicirculis recti.

Ergo anguli PYX, YXV sunt recti.

Ergo ZYXV est rectangulum. Et triangula DPY, DYX, DXV sunt rectangula, et æquiangula.

Et quatuor rectæ DP (sive AD) DY, DX, DV continue proportionales.

Et cubus a DX, minore mediarum, duplus cubi a DV. Itaque inventus est est cubus duplus cubi a DV. Quod erat faciendum.

Sequitur hinc cubum ab AD duplum esse cubi a DY, id est, ut 8 ad 4.

Praxis facillima est. Nam descripto quadrato ABCD, et sumpta AS, sinu 45 graduum; et divisa SD bifariam in T, circulus centro T, intervallo TV descriptus, transibit per X, Y, medias quæsitas. Vel sic: a puncto S ducatur perpendicularis secans semicirculum descriptum radio *a*V, iterum in Z; et PZ producta incidet in Y, punctum quæsitum. Est enim angulus VZP in semicirculo rectus.

Contra hæc objiciunt algebristæ duos calculos arithmeticos: quorum primus est Johannis Wallisii, professoris geometriæ Saviliani in Academia Oxoniensi, talis:

"Ponamus DV=1, adeoque DA vel DP=2.

---

* "Jungatur YX, secans *af* in *i*. Secta autem est PX a recta *a*T bifariam. Ergo ducta XT, et producta, incidet in Z. Et XZ æqualis est diametro YV. Ergo tam T*e* quam T*i* est semissis rectæ VK, et proinde inter se æquales. Et anguli, etc." Edit. 1662.

Cum itaque sunt ejusdem circuli, tum AD radius, tum AS sinus graduum 45; erit $AS = \sqrt{2}$; et $SD = 2 - \sqrt{2}$; et $TD = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Adeoque $TV = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$; et $DY = 3 - \sqrt{2}$; et $DX = \sqrt{3 - \sqrt{2}}$. Ideoque tribus DV, DX, DY quarta proportionalis (quam quidem abscindet YZ recta ad rectam DP continuata) erit $3 - \sqrt{2}$ in $\sqrt{3 - \sqrt{2}}$, hoc est 1.997 fere; minor quam $DP = 2$. Adeoque YZ producta occurret rectæ DP, non quidem in puncto P, sed in puncto aliquo inter P et D. Et consequenter, cum sit XYZ angulus rectus, erit XYP recto major."

Ad calculi hujus examinationem, notanda est differentia inter arithmeticorum multiplicationem, et ductionem geometrarum, satis per se sine demonstratione mathematicis cognita.

Arithmetici quantitates aliasque res omnes multiplicant multiplicandum semel vel sæpius numerando. Quæ multiplicatio nihil aliud est quam æqualium, quatenus æqualium, additio.

Itaque numerus sic factus speciem numerati non mutat; cum numerus linearum sint semper lineæ, planorum semper plana, et solidorum solida, et rerum res ejusdem generis.

Geometrarum ductio semper est ductio lineæ in lineam, vel in superficiem: nimirum lineæ in lineam ut fiat superficies, lineæ in superficiem, ut fiat solidum. Nam ultra solida non progreditur geometra, qui surdosolida, quadratoquadrata, quadraticubos, cubicubos non agnoscit. Speciem ergo ductio geometrica semper mutat, faciens ex lineis non lineas, sed superficiem; et ex linea in superficiem non superficiem, sed solidum.

Præterea geometrarum quadrata, cubi, et solida,

sunt vere quadrata, et cubi, et solida. Arithmeticorum autem numeri quadrati, numeri cubi, numeri plani, triangulares, pyramidici, figuræ non sunt, sed propter similitudinem aliquam in situ punctorum sic appellati; nec ductio lineæ in lineam multiplicatio unquam recte dicitur, nisi linea multiplicando toties sumatur, quot sunt in linea multiplicante puncta, id est, nisi infinities sumatur, ut fiat superficies. Itaque qui multiplicat lineam per numerum, superficiem non facit; nec qui superficiem per numerum multiplicat, faciet unquam solidum. His positis, calculum examino. DY, in figura prima, æqualem esse triplæ DV minus latere quadrati æqualis duplo quadrato a DV, recte quidem vidit, et proinde æquatio illa $DY = 3 - \sqrt{2}$ vera est. Sed proxima æquatio, $DX = \sqrt{3 - \sqrt{2}}$, insana est. Causa autem quare veram esse credidit, hæc est. Posuerat initio $DV = 1$. Quoniam ergo DV, id est 1, DX, $3 - \sqrt{2}$, sunt continue proportionales, multiplicatis inter se extremis 1 et $3 - \sqrt{2}$, media, id est DX, erit radix producti, id est $\sqrt{3 - \sqrt{2}}$. Nam in multiplicatione arithmetica unitas nihil mutat. Sed linea DV multiplicata in DY lineam, facit rectangulum, inter cujus latera DY, DV media proportionalis est DX.

Quia ergo DV æqualis est 1, erit rectangulum sub DY, DV æquale sui ipsius lateri, id est (ut notavi supra) DY infinities sumpta æqualis est eidem DV semel sumptæ. Quod mihi quidem videtur insanum, sed lectoribus nolo præjudicare.

Deinde, quod dicit $3 - \sqrt{2}$ in $\sqrt{3 - \sqrt{2}}$ esse tribus DV, DX, DY in ratione continua quartam, et æqualem 1.997 fere; nimirum, quarum partium

AD est 2, vel 1997 quarum AD est 2000: impossibile est: cum uterque factor sit linea, nec numerum linearum faciunt, sed superficiem.

Secundus calculus est professoris geometriæ in Collegio Greshamensi, talis:

"Ponatur AB, sive AD=2.

"Erit DF sive DV=1.

"Ergo AV=3.

"BR sive AS= $\sqrt{2}$.

"Ergo SV sive YD=3— $\sqrt{2}$.

"Cubus AD=8.

"Cubus DY=45— $\sqrt{1682}$=4 fere.

"Nam 45— $\sqrt{1681}$=4.

"Est ergo DY paulo minor majore mediarum inter AB=PD, et DV=DF."

In hoc calculo, si verborum sequamur sonum, unitas non mutatur, sed (ut in arithmetica fieri debet et solet) servatur semper eadem, nempe DV. Applicata ergo ad calculum cubi, multa habet absurda.

Primum, quod posita recta AD=2, facit cubum ab AD=8: hoc est, cubum sui lateris quadruplum.

Secundum, quod facit cubum a DY=45 cubis a DV— $\sqrt{1682}$ quadratis ab eadem DV. Et, per consequens, (additis utrinque $\sqrt{1682}$), cubum a DY+ $\sqrt{1682}$=45 cubis a DV fere, id est, quatuor cubos æquales quadraginta quinque cubis ab eadem recta fere.

Nam $\sqrt{1682}$, cum sit linea, cubo a DY nihil addit.

Tertio facit $\sqrt{8}$ æqualem cubo a semidiagonali AS, id est, diagonalem AC æqualem cubo a sui ipsius dimidio.

Verum si unitas mutari intelligatur, ut sit primo *una linea,* deinde *unum planum,* postremo *unum solidum,* (quanquam etiam sic æquatio illa maneat absurda, $45 - \sqrt{1681} = 4$, id est linea æqualis 45 cubis, falsitatem indicans*), ad veritatem prope quidem accedet calculus, non tamen ut attingat, atque ea de causa non attingat, quia est verus†. Quod sic ostendo :

Quoniam $DY = 3$, $DV = \sqrt{2}$, et $AS = \sqrt{2}$: ducatur cubice DY—AS ut sequitur.

$$\begin{array}{r} DY - AS \\ DY - AS \\ \hline DY^2 - DY \text{ in } AS \qquad\qquad \\ - DY \text{ in } AS + AS^2 \\ \hline DY^2 - 2DY \text{ in } AS + AS^2 \\ DY - AS \\ \hline - DY^2 \text{ in } AS - {}^{\ddagger}2DY \text{ in } AS^2 - AS^3 \\ DY^3 - 2DY^2 \text{ in } AS - {}^{\ddagger}DY \text{ in } AS^2 \qquad\quad \\ \hline DY^3 - 3DY^2 \text{ in } AS - 3DY \text{ in } AS^2 - AS^3 \end{array}$$

In hac cubicatione, AS semel tantum ducitur in DY, cum sit linea, et communis omnibus cubi complementis, nec auget quadrata, nec propterea producti cubi est pars. Quando vero AS convertitur in numeros, numeri illi erunt cubi sic facti partes, eædemque ter numeratæ, unde differentia illa parva quæ est inter $\sqrt{1682}$ et $\sqrt{1681}$ est planum, non linea, sicut et cæteræ partes omnes lineæ AS.

---

* In edit. 1662 desunt verba in uncis inclusa.

† Sic edit. 1662 et 1668. ‡ Sic edit. 1662 et 1668.

Necesse ergo est ut computatio in numeris faciat cubum paulo majorem quam revera est, et ut $\sqrt{1682}$ sit numerus solidorum. Et quoniam AS est quantitas *negata,* apparebit cubus a DY, numeris æstimatus, justo minor. Calculus ergo in numeris ubi linea quæcunque sumitur pro unitate, (cum linea divisibilis sit in semper divisibilia, unitas autem divisibilis non sit), necessario falsus est, et proinde ad confutandum aut confirmandum calculum geometricum inutilis.

FINIS.

DE PRINCIPIIS ET RATIOCINATIONE

GEOMETRARUM:

UBI OSTENDITUR INCERTITUDINEM FALSITATEMQUE NON MINOREM INESSE SCRIPTIS EORUM QUAM SCRIPTIS PHYSICORUM ET ETHICORUM.

CONTRA FASTUM PROFESSORUM GEOMETRIÆ.

AD ILLUSTRISSIMUM DOMINUM

D. HENRICUM BENNET

BARONEM DE ARLINGTON,

SERENISSIMO REGI CAROLO II A CONSILIIS ET SECRETARIUM PRIMARIUM.

Cum senectutis meæ solatium maximum tuæ, illustrissime Domine, opi debeam, ingratus essem nisi tantæ gratiæ vestigium aliquod, etsi obscurum, extare curarem. Quod cum alia non possum, vulgata via scholarium facio, dedico tibi libellum, non male moratum, sed tamen audaculum: geometrarum enim totam invadit nationem. Quid, inquies, si injuste? Mihi quidem id dedecus magnum esset: sed quod ad te, qui ad altiora institutus es, quemque morum et officii mei erga teipsum, non nugarum mearum inspectorem facio, non pertinebit. In magno quidem periculo versari video existimationem meam, qui a geometris fere omnibus dissentio. Eorum enim qui de iisdem rebus mecum aliquid ediderunt, aut solus insanio ego aut solus non insanio: tertium enim non est, nisi, quod dicet forte aliquis, insaniamus omnes. Cæterum sine judice lis est, nisi quod judicem aliquando seipsam constituet nondum imbuta posteritas. Videri tibi interea vir bonus, etsi pessimus geometra, satis habeo. Deum precor ut te optimo Regi ministrum optimum diutissime conservare velit.

Servorum tuorum humillimus

Thom. Hobbes.

INDEX CAPITUM.

CONTRA GEOMETRAS.

Contra geometras, amice lector, non contra geometriam hæc scribo. Artem ipsam, artium navigandi, ædificandi, pingendi, computandi, et denique (scientiæ omnium nobilissimæ) physicæ matrem, æque ac qui maxime laudibus extollendam censeo.

Cæterum ubi geometræ encomiis artis quam profitentur, imperite an astute nescio, suas ipsorum laudes immiscent, licitum mihi, puto, erit distinguere. Quomodo autem scientiam hanc laudare soleant magistri ejus, ex uno Clavio intelligere possumus, laudante illam in Prolegomenis ad Euclidem hoc modo: "Si vero nobilitas atque præstantia scientiæ ex certitudine demonstrationum quibus utitur, sit judicanda: haud dubio mathematicæ disciplinæ inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantque ita ut vere scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitationem tollant: id quod aliis scientiis vix tribuere, etc." Et paulo infra: "Disciplinæ mathematicæ veritatem adeo expetunt, adamant, excoluntque, ut non solum

nihil quod sit falsum, verum etiam nihil quod tantum probabile existit, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirmant."

Quibus verbis (quia *sciens*, non *scientia* demonstrat) non artem ipsam, sed magistros laudat. Certitudo scientiarum omnium æqualis est, alioqui enim scientiæ non essent: cum *scire* non suscipiat magis et minus. Physica, ethica, politica, si bene demonstratæ essent, non minus certæ essent quam pronunciata mathematica: sicut nec mathematica scientiis aliis certior esset, nisi recte demonstrarentur ea quæ pronuntiat.

Itaque per hanc epistolam hoc ago, ut ostendam tibi non minorem esse dubitandi causam in scriptis mathematicorum, quam in scriptis physicorum, ethicorum, etc.

Omitto inter geometras dissentiones et mutua convitia, quæ signum certissimum ignorantiæ sunt. Ipsa aggredior principia, et interdum etiam demonstrationes. Sive enim principia falsa sint, sive illatio necessaria non sit, demonstratio nulla est. Pro geometris autem omnibus oppugnabo Euclidem, qui omnium geometrarum magister existimatur, et interpretem ejus omnium optimum Clavium.

Itaque primo loco examinabo Euclidis principia: secundo, ea quæ principiis illis innitentia videntur mihi esse falsa, sive ea sint Euclidis, sive Clavii, sive cujuscunque geometræ, qui principiis illis vel aliis falsis usi sunt: atque ita oppugnabo, ut meliora rejectis substituam, ne artem ipsam videar labefactare velle.

CAP. I.

DE PUNCTO.

CAP. I. De puncto.

DEFINITIO Euclidis prima *puncti* est, hæc: *punctum* (σημεῖον) *est cujus pars nulla est.*

Quid definitione hac intellexit Euclides, difficile est scire. Signum enim, quatenus signum, nomen *quanti* non est, sed relationis: quanquam quicquid sit quod in signum alicujus rei statuas visibile, necessario corpus sit, et proinde *quantum* etiam et divisibile est, et partem habere potest. Etiam verba illa, *cujus pars est nulla,* dupliciter intelligi possunt: aut pro *indiviso;* pars enim non intelligitur, nisi ubi præcesserit divisio : vel pro *indivisibili,* quod per naturam suam divisionis est incapax. In priori sensu, punctum quantitas recte dicitur: in posteriore, non item; cum omnis quantitas divisibilis sit in semper divisibilia. Itaque si punctum sit indivisibile, carebit linea omni latitudine: et quia nihil est longum quod non habeat latitudinem, erit linea plane *nihil.* Quanquam enim longitudo lata non sit, longum tamen omne latum est. Videtur etiam Euclidem ipsum in ea opinione fuisse, punctum, quanquam partem actu non habeat, potentia tamen divisibile esse et quantitatem : alioqui non postulasset a puncto ad punctum duci posse lineam rectam: quod impossibile est, nisi linea habeat latitudinem aliquam. Verum sive ita senserit Euclides, sive aliter, manifestum est punctum divisibile esse, ex eo quod, secta linea in duas partes, habebit utraque pars duos terminos, id est, duo puncta extrema : et per consequens punctum dividens secatur, si quantitas sit, in duas quantitates;

CAP. I.
De puncto.

si nihil sit, in duo nihila. Etiam circulus secari potest in sectores quotcunque: et proinde, cum omnis sector desinat in punctum, secabitur quoque centrum in totidem puncta, partes totidem centri; sive centrum illud quantitas sit, sive nihil.

Definitio ergo *puncti* apud Euclidem, quemadmodum eam intelligunt geometræ post Euclidem omnes, vitiosa est. Quam tamen, si nullum in geometria errorem peperisset, præteriissem.

Definitio *puncti* vera, et quæ vitium nullum in demonstrationes illatura sit, talis esse debet: *punctum est divisibile quidem, sed cujus pars nulla in demonstratione consideranda est:* id est, considerandum est, non ut punctum, quod Græce νυγμὴ dicitur; neque ut στιγμὴ, quæ Græce est distinctio visibilis; quæ ambo *quanta* sunt: sed ut signum, quod Græce est σημεῖον, quo verbo utitur Euclides. Signum enim *quanti* nomen non est.

Est enim geometria, *scientia qua ex aliqua vel aliquibus mensuratis per ratiocinationem determinamus quantitates alias non mensuratas.* Recte igitur incepit Euclides a definitione *mensuræ,* qua mensurantur longitudines: et primo loco, *mensuræ* illius terminum definiit, et *signum* esse dixit. Sed cujus rei signum? Signum, a quo mensuræ terminus unus aut alter mensurato applicatur.

Præterea si *punctum* indivisibile esset, id est, *non quantum,* id est, nihil: sequeretur (supposito, ut nunc supponunt scriptores mathematici, quantitatem dividi in infinitum, ut punctum sit pars lineæ infinite exigua) partem infinite exiguam lineæ rectæ, et quadratum quod sit minima pars quadrati, et cubum qui sit minima pars cubi, esse inter se æqualia.

CAP. II.

DE LINEA.

CAP. II. De linea.

LINEAM, definit Euclides, *longitudinem esse sine latitudine*. Scilicet, conformatur hæc ad definitionem puncti, et propterea eadem omnia habet vitia. Nam ut centrum circuli dividitur a sectoribus in partes quotlibet, ita etiam sectorum latera dividuntur secundum latitudinem. Nam si sector quilibet dividatur in duos sectores, quorum unus apud te esset, alter apud me, haberet uterque duo latera : et propterea, sive latus illud medium habeat latitudinem, sive non-latitudinem, erit divisum in duas superficies, vel in duas non-superficies. Itaque omni modo linea est divisibilis.

Linea ab aliis definitur, *puncti moti vestigium*, sive via. De qua definitione Clavius sic loquitur : "Mathematici quoque, ut nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum, jam descriptum superiori definitione, e loco in locum moveri. Cum enim punctum sit prorsus individuum, relinquetur ex eo motu imaginario vestigium quoddam longum, omnis expers latitudinis." Vide mathematicorum, qui subtiliores multo sunt quam qui operam dederunt studiis cæterarum artium, Clavium subtilissimum, scribentem hoc loco, *vestigium relinqui longum a motu ejus quod nullam habet latitudinem*, id est, a motu nihili. Sciunt tamen omnes, nihil moveri præter corpus, neque motum concipi nisi corporis posse. Sed corpus omne motum vestigium relinquit non modo longum, sed etiam latum. Definitio igitur lineæ debebat esse hujusmodi : *linea est vestigium quod relinquitur a motu corporis, cujus quantitas non consideratur in demonstratione.*

CAP. III.

DE TERMINO.

CAP. III. De termino.

Definiuntur, tertio loco, lineæ termini hoc modo: *lineæ termini sunt puncta.* Quam definitionem non reprehendo; sed ut* ab ea, id quod ante dixi, nimirum punctum non esse indivisibile, sed tantum in demonstratione non ut divisum considerari, inde ostendam. Si enim linea secetur in puncto bifariam, cum utraque habeat duos terminos, sitque punctum illud in quo dividitur linea omnino nihil: duæ partes a divisione factæ se mutuo tantum tangerent, nec haberent ullum punctum commune. Et proinde terminus extremus magis distabit a termino alterius lineæ ad quod* est punctum dividens, quam a sui ipsius termino altero, ad quem itidem ponitur idem punctum dividens: id est, major est una partium quam altera, et proinde linea illa divisa non est bifariam, ut supponebatur. Exempli gratia: linea AB secta bifariam in C, partes ejus se tangunt tantum ad C, et earum cujusque termini (cum sint duæ lineæ) sunt omnes quatuor: quare ad C erunt duo termini, qui sint D et E, et per consequens BD major est quam AC. Non est ergo AB divisa bifariam in C, nisi D, C, E considerentur ut idem punctum.



CAP. IV.

DE LINEA RECTA.

Definitio quarta est *lineæ rectæ*, talis: *linea recta est quæ ex æquo sua interjacet puncta:* id

* Sic Edit. 1668.

CAP. IV. De linea recta.

est, (interprete Clavio), in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum aut deorsum, huc vel illuc deflectendo, subsultat: in qua denique nihil flexuosum reperitur. Non agnosco hic orationem mathematicorum. Quomodo punctum subsultet sursum et deorsum, huc et illuc, non intelligo: non tamen credo quemquam esse qui rem ipsam, lineam inquam rectam, animo suo non satis recte concipiat, idea nata ab aliqua linea recta materiali, quanquam ideas suas non omnes homines possunt oratione æque declarare. Sed neque contra, illi qui cogitata sua optime describunt, sunt semper optimi mathematici. Definire enim vocabula artis cujuscunque non est ipsius artis, neque forte omnino artis opus: sed partim judicii naturalis, quo distinguitur inter cujusque rei essentialia et non essentialia, partim ingenii ad inveniendum verba et orationem prompti, quibus ea quæ essentialia sunt proprie et adæquate significentur. Itaque diversi homines eandem habentes ideam lineæ rectæ, non tamen eandem ejus definitionem assignaverunt. Indicat nobis hoc loco Clavius plurium doctorum hominum *lineæ rectæ* definitiones. Primo loco Procli: nempe, recta est, quæ tantum præcise occupat spatium, quanta est distantia inter puncta ejus extrema. Secundo, Platonis: recta est, cujus intermedia puncta obumbrant extrema. Tertio, Archimedis: recta est minima habentium terminos eosdem. Quarto, Campani: recta est brevissima a puncto ad punctum extensio. Quinto, eorum qui dicunt, rectam esse, quæ describitur a puncto moto nec vacillante. Quibus ego addo aliam authoris recentioris: recta est cujus termini, salva quantitate, diduci non possunt.

CAP. IV.

De linea recta.

Quarum definitionum quænam sit cæteris præferenda, ex duabus rebus judicandum est, idea et usu. Ex idea, an vera sit: ex usu, an principium demonstrandi idoneum sit. Idea, juxta quam definita est a Platone linea recta, imago erat projectæ ab ea umbræ: quam quidem projici vidit per rectam. Itaque quid sit recta satis conceperat: sed definitio illa plane sterilis est, nec ullius usus ad demonstrandum utrum linea de qua quæritur recta sit necne, neque ad demonstrandum rationem rectæ ad curvam. Procli, Archimedis, et Campani definitiones verbis quidem differunt, idem autem significant, nempe, rectam esse quæ inter eosdem terminos est brevissima: quæ orta est ab idea visarum plurium linearum conterminarum, quarum unica visa est recta et brevissima. Atque hac definitione utitur Archimedes. Quis enim, qui conceperit in sphæra plures circulos meridianos et axem unicum, non judicabit axem tum rectam esse lineam, tum brevissimam aliarum omnium quæ transeunt a polo ad polum? Idea unde nata videtur esse definitio ultima, erat quod videret extensionem nihil aliud esse præter diductionem extremorum punctorum: contraque, incurvationem nihil aliud esse quam adductionem terminorem eorundem. Quod rectam definiunt, *vestigium puncti moti, nec vacillantis,* a nulla idea ortum est, nec oriri potuit: quia vacillare nihil dici potest, nisi respective ad vestigium lineæ jam ante ductæ. Neque videtur magis vacillare punctum, dum describit circumferentiam circuli, quam dum describit lineam rectam.

At definitio Euclidis omnino est insignificans.

Quis enim intelligat quo modo puncta media lineæ ex æquo jacent inter extrema? CAP. IV. De linea recta.

Quo argumento ostensum est punctum non esse sua natura, sed solummodo ut consideratum in demonstrationibus, indivisibile: eodem demonstrari potest, lineam non esse sua natura sine latitudine, sed solummodo quatenus considerata est inter demonstrandum.

CAP. V.

DE SUPERFICIE.

Definitio quinta, *superficies est quæ longitudinem latitudinemque habet,* iisdem omnibus laborat vitiis cum definitione lineæ: cum, exempli gratia, bases duorum hemisphæriorum duæ sunt, sive hemisphæriorum illorum alterum sit apud Indos Orientales, alterum apud Occidentales, sive se mutuo contingant. Dividitur ergo una cum sphæra etiam maximus ejus circulus, id est, dividitur secundum profunditatem. Profunda ergo est superficies quæ basis est hemisphærii.

CAP. VI.

DE SUPERFICIEI TERMINIS.

Definitio sexta, *superficiei termini sunt lineæ,* probat, divisa superficie, duos ejus terminos, id est, duas lineas esse extremas utriusque partis: et, per consequens, lineam dividi posse bifariam ab uno ejus extremo ad alterum.

CAP. VII.

DE SUPERFICIE PLANA.

CAP. VII. De superficie plana.

Definitio septima est, *plana superficies est, quæ ex æquo interjacet suas lineas:* quam Clavius exponens oratione nihil significante, simili ejus qua usus est in explicanda definitione lineæ rectæ, "Plana," inquit, "est superficies, in qua partes omnes in rectum collocatæ sunt, ita ut nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum." Quæ verba ab omni arte aliena, ne ipse quidem potuit intelligere. Quod autem partes plani omnes in rectum collocatas esse dicat, impossibile est nisi planum totum sit una linea recta: quod item superficiem planam talem esse dicit, qualis est superficies perpoliti alicujus marmoris, verum non est, nisi conus aut sphæra marmorea non potest perpoliri æque ac superficies plana. Rem quidem ipsam et Euclides, et Clavius, et omnes homines satis recte concipiunt: sed quæ superficiei planæ essentialia sunt, verbis explicare, saltem facile, non omnes possunt. Si superficiem planam esse dixeris, quæ describitur a linea ita mota, ut singula ejus puncta rectas lineas describant, recte eam definieris, et clare, et essentiæ ipsius consentanee.

CAP. VIII.

DE ANGULO.

Definitio octava: *angulus planus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, et non in*

directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio. Ideam sive imaginem anguli, de quo tam multa dicuntur a geometris, impressam animo pauci habent. Quicquid maxima ex parte in superficie late patens, desinit in angustum, dicitur vulgo angulus. Talem ideam anguli, etiam Euclides a conspectis duabus lineis concurrentibus conceptam videtur voluisse hoc loco verbis declarare: neque, ut videtur, omnino cogitaverat aut audiverat quicquam de angulo contactus. Quanquam enim (Elem. iii. prop. 16) conatur demonstrare angulum factum a tangente et circumferentia circuli minorem esse omni angulo acuto, nusquam tamen nominat angulum contactus, neque de illo sub alio quovis nomine quicquam dicit. Itaque non videtur voluisse comprehendere hac definitione angulum planum ullum, qui non fuerit ejusdem generis cum angulo rectilineo: quod etiam ex eo colligi potest, quod ad anguli definitionem necessariam putaverit esse conditionem, ne *lineæ quæ angulum efficiunt jaceant in directum.* Verum quid voluisse videtur Euclides, conjicere frustra erit: ipsam definitionem verbatim consideremus.

CAP. VIII.

De angulo.

Quod ut melius faciamus, cum sit res satis magni mathematicis momenti, quæque magnas inter Clavium et Pelletarium contentiones excitavit, rem totam descripta figura ponamus ante oculos.

Sit recta AB divisa bifariam in C, et radiis AC, BC describantur duo circuli FI, GH: secetque recta ED rectam AB ad angulos rectos in C.

Videamus primo, quænam sint duæ lineæ quæ angulum constituunt, et quæ duæ angulum non constituunt. Rectæ DC, CE absque dubio constituunt compositæ unam rectam DE. Sed an item

CAP. VIII.

De angulo.

rectæ AC, CE constituant unam lineam curvam, incertum est: imo vero, certum potius quod non. Nam punctum C considerabitur vel ut quantum, vel ut nihil. Si ut nihil, neque linea DE neque linea FI duci potest, neque considerari. Sin punctum consideretur ut quantum, considerabitur recta quidem DE ut rectangulum, et arcus FI ut orbis alicujus latitudinis. Itaque punctum C considerabitur ut pars utriusque communis: et sic erit idem punctum consideratum ut majus et minus, id est, ut quadratum et circulus ipsi inscriptus. Quare duæ rectæ constituentes angulum rectum, nullo modo considerari ut una recta possunt. Multo autem minus, si constituunt angulum acutum. "Quid ergo," inquiet forte aliquis, "nullane neque arte, neque fortuna dividi potest linea recta in partes aliquotas? Punctum enim si nihil sit, nusquam est, neque in media linea, neque in tertia, neque in quarta parte ejus. Sin punctum sit quantum, auferetur per divisionem aliqua pars rectæ dividendæ." Ad quod respondeo: recte dividetur recta, si secemus eam per lineam habentem exiguam aliquam latitudinem, ita ut partes utrinque sint æquales, dicamusque totius rectæ secandæ medietatem esse ad mediam latitudinis lineæ secantis: accuratius autem dividi bifariam, ab humana saltem potentia, non potest. Itque hæc verba *duarum linearum, etc.*, ut obscura reprehendo, propterea quod quæ duæ lineæ unam constituant vel non constituant, nondum docuerat.

Id quod facit duas lineas compositas recte vocari *unam*, est quod idem omnino habeant punctum commune, quale quidem habent arcus FC, CI: sed non item FC, CD, neque EC, CA.

Videamus secundo, quænam sint lineæ quæ ad faciendum angulum debent *se mutuo tantum tangere:* et (quoniam locum hunc exponens Clavius angulum effici dicit ex hujusmodi *concursu* seu *inclinatione*) quid sit duarum linearum in plano concursus. Etiam quid sit *jacere in directum.* Quid etiam sit *inclinatio*, quam Clavius eandem rem esse putavit cum concursu. Et quid sit *lineam a linea secari.* CAP. VIII. De angulo.

Recta arcum, sive aliam lineam curvam, *tangit tantum*, quando tangit quidem, tota tamen est extra circulum, ut nullum sit utriusque commune punctum. Ut qui alicujus domus januam *tangit tantum*, is neque intra domum est, neque in ipsa janua, sed totus extra.

Concurrunt autem duæ lineæ, quando utriusque est aliquod commune punctum, necdum producitur ulterius.

Recta denique arcum secat, quando pars rectæ est intra, pars extra circulum. Non est ergo eadem res contactus et concursus: neque quæ se plusquam tangunt, necessario se mutuo secant: neque recte interpretatus est hoc loco Euclidem Clavius.

Tertio, videamus quid sit *jacere in directum.* Verba illa *jacere in directum* quem locum in lineis non rectis habere possunt, non intelligo: nam si *vera* sunt, juxta interpretationem Clavii, qui dicit duos arcus FC, CI *jacere in directum*, etiam duæ semisses ejusdem circuli jacebunt in directum; et (quod inde sequitur) puncta omnia totius perimetri *jacebunt* in directum; et punctum potest moveri a loco suo, donec ad eundem locum redeat motu directo, et fiat perimeter recta linea.

Videamus quarto, quid sit *inclinatio.* Quando

CAP. VIII. De angulo.

recta rectæ ad angulos rectos insistit, non dicitur, juxta sermonem communem, omnino inclinari in utramvis partem rectæ cui insistit: quando autem altera alteri insistit ad angulos obliquos, tunc *inclinari* ad eam partem dicitur ubi angulus est acutus. Atque hoc sensu *inclinationem* intelligit in Elemento undecimo Euclides. Itaque minima *inclinatio* rectæ CB ad CD tunc est, quando altera ad alteram est perpendicularis: maxima autem, quando admovetur CB ad CD motu circulari ita ut ambæ coincidant. Idem etiam dici potest de *inclinatione* rectæ CD ad CA, et rectæ CA ad CE, et rectæ CE ad CB. Motus enim circularis cujuslibet e quatuor rectis ad rectos angulos deinceps collocatis, inclinationem mensurat, adeoque angulos eo motu generatos: et semper quo major est pars totius circuitionis quæ eo motu circulari conficitur, eo major est angulus.

Jam inclinatio rectæ CD ad arcum CI quo pacto mensurari potest, cum partes omnes arcus CI diversas habeant inclinationes, nisi quod in puncto unico C inclinatio maxima est, nempe puncti C quatenus in recta DC ad idem punctum C, quatenus in arcu IC? Itaque angulus qui fit a curva CI et recta CD, omnino ad punctum ipsum C nullus est, nisi angulus contactus non sit ejusdem generis quantitatis cum angulo quem efficit radius per motum circularem ad alium locum translatus. De quo fusius dicetur in examinatione Prop. 16. Elem. iii.

Videamus denique, cur ad constitutionem anguli necessarium fit ut duæ lineæ, ipsum efficientes, non jaceant in directum: cujus causam hanc reddit Clavius, quod nec duæ partes ejusdem rectæ, nec duo arcus ejusdem circuli, faciunt angulum. Cæte-

rum non negabit angulum habere quantitatem, neque duas quantitates (ejusdem generis proximi) compositas habere quantitatem unius duplam, neque duos angulos ACD, ACE esse vere angulos ejusdem generis. Quomodo ergo negabit duas rectas CD, CE constituere duos angulos rectos, sive unum angulum recti duplum? Continent ergo duæ rectæ CD, CE, quanquam in directum collocatæ sint, angulum. CAP. VIII. De angulo.

Postremo, Clavius definitionem hanc Euclidis exponens sic scribit: "Consistit autem anguli cujusvis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine, linearum: lineæ enim longius excurrentes non augent suam inclinationem; igitur neque anguli magnitudinem." Quid ergo opus est omnino ad essentiam anguli lineis: quæ minui possunt ambæ in infinitum, salva quantitate et natura anguli? Etiam in angulo contactus, si minuatur arcus IC quantum fieri potest, quænam erit differentia inter angulos DCC et DCD? Scire hinc potes an accuratiores acutioresve sint mathematici, quam aliarum artium studiosi.

Restat ut anguli plani naturam explicem, et inter angulum contactus et angulum ex circulatione distinguam: et utramque definiam si potero clarius, accuratius, et ad usum geometricum accomodatius.

Centro A, motu radii AB, describantur duo circuli BCD, EFG: neque refert utrum AB sit recta an curva, quales sunt curvæ punctis signatæ AB, AH; nam easdem describunt tum superficies tum lineas. Et a centro ad circumferentiam ducatur recta AH utcunque, secans circulum EFG in I. Facit ergo AB, per motum circularem ad AH, angulum BAH: et pergens ad C, facit angulum ma-

CAP. VIII.
De angulo.

jorem ejusdem generis. Appellabimus autem hoc genus anguli, *angulum genitum ex circulatione*, sive motu circulari radii. Itaque ideam anguli hujus generis perfectam habes. Cæterum ad definitionem ejus legitimam, investiganda prius ea sunt quæ ipsi sunt essentialia.

Primum est, ut sit quantum. Hoc autem manifestum est, ex eo quod alter altero major esse potest: ut angulus BAC major est angulo BAH.

Secundo, quia anguli BAH, EAI æquales sunt, sed neque rectæ AB, AE, neque plana BAH, EAI, æqualia sunt, certum est quod essentia anguli non consistit neque in quantitate linearum quibus includitur, neque in quantitate superficierum BAH, EAI: neque denique consistit essentia anguli in magnitudine arcuum BH, EI, cum anguli ipsi æquales sint, arcus æquales non sint.

Ubi ergo inveniemus æqualitatem illam, propter quam æquales dicuntur duo anguli BAH, EAI?

Duo anguli BAH, EAI æquales vocantur, propterea quod æquales sunt partes, sive potius eadem pars, totius circumlationis radii. Sunt enim duo arcus BH et EI facti a motu radii, sive recti sive curvi, AB eodem tempore. Itaque æqualitas angulorum hujus generis consistit in æqualitate partium temporis in quo circulatio tota radii perficitur. Atque hinc est, nec aliunde, quod tum anguli tum sectores, in eodem circulo sumpti, sunt in eadem ratione cum suis arcubus.

Habes ergo naturam anguli *ex circulatione geniti*, nempe, eandem cum natura circulationis. Et angulus ipse est pars circulationis totius. Et arcus, et anguli sui, eadem est quantitas. Nomen autem anguli arcui datum est, propter lineas quæ,

ductæ a centro ad circumferentiam, faciunt ut angulus conspiciatur. Neque sunt illæ lineæ rectæ de essentia anguli, qui sine illis determinatur in arcu, quanquam essentiales sint figuris angulatis, ut triangulis, quadratis, etc.

CAP. VIII. De angulo.

Ex his quæ dicta sunt de natura anguli, brevis et clara emergit anguli hujus generis definitio hæc: *Angulus est circuitionis, sive circumlationis, radii, dum circulum vel partem circuli describit, quantitas.* Dicere enim quod sit *inclinatio linearum*, aniculæ potius est sedentis ad angulum camini, quam mathematici, ejusdemque accurati et rigidi.

Mensuram autem hujus generis angulorum agnoscunt omnes esse arcum circuli: agnoscunt item mensuram et mensuratum esse in eodem genere quantitatis. Idem ergo est quantitatis genus, arcus et angulus.

Consideremus jam naturam *anguli contactus.* Divisa AB bifariam in K, radio KB describatur semicirculus BA: ducaturque recta BL magnitudinis indefinitæ, sed parallela AF, quæ propterea tanget circulos BA et BD in puncto B. Supponamus rectam aliquam, ut BL, æqualem arcui BA: impossibile enim non est. Supponamus etiam BL in omni ejus puncto æqualiter flecti sive incurvari, ita ut coincidat cum arcu BA: neque enim hoc est impossibile, quia ut arcus extensione fieri potest linea recta, ita recta per flectionem converti potest in arcum circuli. Habemus ergo duos arcus BA, BD æqualiter curvos, quanquam magnitudine inæquales. Deinde, si a puncto B ducatur recta BM secans utrumque semicirculum, majorem in M, minorem in N: erunt quoque arcus BM, BN æqualiter curvæ, cum sint in eadem ratione cum suis cir-

CAP. VIII. De angulo.

culis integris; quanquam arcus BM major sit quam BN.

Præterea, in eodem circulo, quo minor est arcus eo minorem habet curvitatem, in ratione ipsorum arcuum, qui in omni puncto æqualiter flectuntur, sive incurvantur.

Postremo, natura anguli quem faciunt duo arcus BA, BD, non consistit in quantitate superficiei quam continent: nam anguli quantitas determinata, superficies illa indeterminata est. Similiter neque consistit natura anguli, quem facit recta BL cum arcu BM, in superficie indefinita, cui illæ duæ lineæ utrinque adstant.

"In quo ergo", inquies, "consistit natura anguli contactus duorum arcuum, vel arcus et rectæ?" In eo, quod angulus ille determinat quantitatem curvitatis: ut ex modo dictis aperte constat. Nam cum duo arcus BD, BA sint æque curvi, erunt etiam arcus BM, BN (qui sunt ut arcus BD ad arcum BA) æque curvi. Et quia arcus BM duplo curvior est sua semisse, puta arcu BO, erit quoque arcus BN duplo curvior quam est idem arcus BO sibi æqualis. Atque idem omnino continget in omni alia proportione arcus exterioris ad interiorem.

Itaque arcus illi qui angulum contactus dicuntur efficere, aliud non sunt (quoniam curvitas major, vel minor, vel æqualis, alteri curvitati esse potest) quam quantitas curvedinis circumferentiæ. Itaque angulum contactus, quem angulum dici volunt geometræ, sic definio: *Angulus contactus est quantitas curvitatis quæ est in arcu circuli facta a continua et uniformi flexione lineæ rectæ.*

Sequitur hinc, in puncto primo rectæ BL, nempe puncto B, ubi nulla intelligi potest flexio, nullam

esse curvitatem: et proinde rectam BD cum arcu BM in puncto B constituere angulum rectum. Fatetur enim Clavius longitudines linearum nil mutare in magnitudine anguli: nec ideo angulum contactus quicquam detrahere a magnitudine anguli recti rectilinei DBL. CAP. VIII. De angulo.

Sequitur etiam angulum contactus non esse ejusdem generis cum angulo rectilineo, quod et Clavius fatetur: cum curvitates arcuum æquales esse possunt tunc, quando arcus ipsi sunt inæquales. Hæc tibi satis perspicue puto explicavi. Sin argumenta Clavii contra Pelletarium assensum tuum etiam nunc impediant, tollam ea cum istuc venero.

CAP. IX.

DE FIGURA.

Definitio decima tertia, nempe, *terminus est quod alicujus extremum est,* sera venit: cum in tertia et sexta definiisset terminos lineæ et superficiei esse puncta.

Definitio decima quarta, *figura est quæ aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.* Quæro hic primo, ad quam vocem expressam vel subauditam refertur vox relativa *quæ.* Si refertur ad figuram, definitio erit (*figura est figura quæ aliquo,* etc.) vitiosa. Sin ad vocem *magnitudo,* tum definitio talis erit: *Figura est magnitudo quæ aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur:* vel brevius, *figura est magnitudo undiquaque finita.* Quæ quidem definitio est legitima. Sed quomodo excludet ab hac definitione Clavius finitam lineam? Dicet fortasse, lineam quæ *longitudo tantum est,*

CAP. IX.

De figura.

terminos alios non habere præterquam longitudinis, et propterea figuram non esse. Quomodo ergo differunt inter se duæ lineæ finitæ inæquales, quarum altera recta, altera curva est, si non figura? Differunt enim plusquam longitudine.

Definitio decima quinta: *Circulus est figura plana sub una linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, in quam ab uno puncto eorum quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.* Quam non reprehendo: sed quæro, primo, quare latera omnia simul quæ constituunt ambitum polygoni, non æque una linea sunt ac perimeter circuli; qui circulus polygonum censeri potest laterum numero infinitorum. Si dicant differentiam consistere in eo quod duo latera polygoni non habent punctum commune ad eos quos faciunt angulos, sicut habent duo quilibet arcus circuli, acquiescam. Cæterum si ita dicant, videant an ἀκρίβειαν illam propositionis 47, Elem. i, non tollant, cui maxima pars geometriæ innititur. Quæro secundo, cur non definivit circulum a circumductione radii, ut definivit sphæram a circumductione semicirculi; nam potuit: et fuisset definitio illa declaratio generationis circuli, et per illam hæc definitio demonstrari breviter potuisset. In his igitur definitionibus reprehendo τὴν σκαιότητα.

Definitio tricesima quarta: *Parallelæ rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, et ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incident:* vera quidem est propositio, non autem bona definitio. Bona definitio ingenerare debet auditoris animo ideam parallelismi, id est, æquidistantiæ. At in hac definitione ne una quidem vox est quæ significat aut æquali-

CAP. IX. De figura.

tatem aut duarum rectarum distantiam. Neque omnino possibile est ideam habere lineæ infinite productæ. Fortasse, ex eo quod in neutram partem coincidant, demonstrari potest quod sunt parallelæ, sive quod ubique æque distant, sed ex alia parallelarum sive æquidistantium definitione.

Deinde per bonas definitiones demonstrari solent et debent conclusiones primæ: hac vero Euclides nusquam utitur.

Definitio denique neque demonstrabilis est, nec esse debet: cum sit demonstrationis principium.

Hanc autem demonstrabo a definitione alia hac: *Parallelæ rectæ sunt, in quarum una sumptis duobus punctis ad quodcunque intervallum, ab illis punctis duæ rectæ facientes cum ipsa ad easdem partes angulos æquales, ductæ ad alteram, sunt æquales.* Ex qua definitione necessario sequitur, duas illas rectas productas nunquam esse concursuras: ut quæ ubique ab æqualibus rectis æqualiter inclinatis distinentur.

Definitio mea hæc ideam æquidistantiæ animo ingenerat, nec ab alia priore demonstrari potest: possunt autem ab illa multo brevius demonstrari parallelarum rectarum, vel etiam parallelorum planorum proprietates, quam aut ab Euclide aut a Clavio demonstrantur.

Atque hæc dicta sufficiant de definitionibus ad Elementum primum, ex quibus cognoscere potes quam bene tum Clavius, tum Euclides, tum etiam eorum sectatores naturam parallelarum, aut anguli, aut lineæ, aut puncti intellexerunt. Videamus jam *petitiones,* utrum æquæ an iniquæ sint.

CAP. X.

DE PETITIONE PRIMA ELEMENTI PRIMI, ET DE DEFINITIONE DECIMA.

CAP. X.

De petitione prima Elementi primi, et de definitione decima.

PETITIO prima: *Ut a quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere concedatur.*

Si concedatur lineam habere latitudinem aliquam visibilem, æqua est: nam a puncto ad punctum extendi potest ex lino filum. Alioqui factu impossibile est: et propterea petitio iniqua est.

Sed illa Euclidis γραμμὴ, etsi latitudinem habeat, duci non potest nisi in plano. Planum autem describi non potest sine ope rectæ lineæ: ita ut neque recta Euclidis, neque superficies plana, accurate describi possit. Opus est instrumentis mechanicis, qualia sunt regula et norma, id est, non accurate. Æquum tamen esse fateor, ut in opificiis humanis pro accurato habeatur, quod accurato est proximum. Sed quod lineas hyperbolicas et ellipticas duci posse Euclidistæ non concedant, (cum certius aliquanto ellipsis et hyperbole ope fili duci potest quam linea recta ope regulæ), iniquum est. Itaque quamdiu geometræ lineas has duci posse negant, tamdiu petitio hæc iniqua est: et propterea etiam secunda haberi debet pro iniqua.

Definitiones Elementi secundi faciles sunt, et propter eam causam vitio carent. Idem dico de definitionibus Elementi tertii fere omnibus. Fere, inquam: notandum enim est, quod in secunda definitione Elem. iii, definit *tangere*, per *tangere* nec *secare*: incertum relinquens an punctum contactus intelligendum sit in una tantum linearum contiguarum, an in utraque, an inter utramque. Potest

enim si (quod ille dicit) punctum nihil est, considerari punctum inter utramque: nam contigua possunt non modo loco disjungi, sed etiam qualitate aliqua differre, ut colore. Et propterea duo sunt: et sic habebimus tria puncta, nimirum duo in ipsis lineis contiguis quorum alterum sit album alterum nigrum, et inter illa duo puncta tertium nullius coloris. Quemadmodum etiam duæ planæ superficies admotæ ad contactum mutuum erunt altera alba, altera nigra, altera nihil: et tamen omnes simul una superficies.

Non dubito quin Euclides tangentes circulorum semper ducendas putavit per diametrorum terminos: atque ita punctum contactus semper commune fecit trium linearum, nimirum, arcus circuli, tangentis circulum, et lineæ cujusdam per quam tangens ab arcu dividi et loco separari posset. Neque credibile est, si contactum quid sit clare explicuisset Euclides, controversiam inter Clavium et Pelletarium de angulo contactus ullam extitisse.

Definitio decima: *Similia circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales, aut in quibus anguli sunt inter se æquales.* Si in duobus segmentis circulorum valde inæqualium inscriberentur duo anguli inter se æquales, credamne omnem hominem, qui agnosceret angulorum illorum æqualitatem, necessario etiam agniturum esse ipsorum segmentorum similitudinem inferri posse ratiocinando, id est, inde vel aliunde demonstrari posse? Sed tunc non erit definitio: nam ea debet esse indemonstrabilis.

Cum geometria tota versetur circa quantitates, commensurabilia et incommensurabilia, æqualitatem et inæqualitatem, figurarum proportiones et si-

CAP. X.

De petitione prima, etc.

militudines; cumque principia demonstrandi sint definitiones: quomodo excusari possunt geometriæ magistri, qui tanto aliis accuratiores haberi volunt, quod nusquam neque quantitatem, neque mensuram, neque similitudinem definierunt: neque ipsam geometriam, cui, ut videtur, studere homines æquum esse existimaverunt, antequam scirent *cui bono?* Geometriam recte definias esse, *scientiam qua ex aliqua vel aliquibus magnitudinibus mensuratis, cognoscimus per ratiocinationem alias non mensuratas:* mensuram autem esse, *materiale aliquid quod habenti magnitudinem applicatum semel vel pluries, ipsam æquat;* videmus enim lineas mensurari pede, brachio, etc., plana planis, solida solidis, fluida vasibus seu locis congruis. Æqualia autem esse dices, *quæ eidem loco congruere possunt:* similia, *quæ sola differunt magnitudine:* quantitatem denique *magnitudinem definitam*, nempe, expositione aut comparatione cum alia magnitudine cognita. Quæ definitiones et faciles sunt, et principia demonstrandi.

Clavius, ad prop. 22. hujus Elementi tertii, demonstrat, quod *si duo aut plures circuli se mutuo tangant interius in uno puncto, a quo duæ aut plures rectæ educantur, erunt et arcus inter quascunque duas lineas intercepti, et arcus inter quamcunque lineam et punctum contactus intercepti, similes.* Exempli gratia: in figura ad Cap. viii, arcus duos BM, BN demonstrat esse similes. Et quidem recte. Sed ex eo sequetur arcum utrumque habere latitudinem aliquam, majorem majorem, minorem minorem: alioqui falsum erit, Apelle judice, vel alio quovis pictore: cum in similibus arcubus inæqualibus latitudines ipsorum arcuum æquales

esse non possunt, sed in ipsorum arcuum ratione inæquales. Etiam ut longitudines inæquales quatenus longitudines similes sint, dictu absurdum est. CAP. X. De petitione prima, etc.

Hactenus peccata definitionum Euclidis leviora: quæ tamen, si demonstrationes nullas inficiunt, pro nullis habeantur. Accedo jam ad definitiones Elementi quinti, quæ pertinent ad doctrinam rationum et proportionum, geometriæ medullam.

CAP. XI.

DE RATIONE.

PRIMA est, *pars est magnitudo magnitudinis minor majoris, cum minor metitur majorem.* Si per *partem* intelligat partem aliquotam, et inter partes aliquotas numerat totum, (nam æquale metitur æquale), bona est: et eadem in lineis est res, *pars* et *mensura.*

Definitio tertia: *Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam secundum quantitatem habitudo.* Quis ex definitione hac, Latina sive Græca, naturam rationis comprehendere intellectu potest? Quid enim est *ejusdem generis?* Ubi hoc in antecedentibus explicavit? Quid est illud *quædam,* sive (ut Græce sonat) *aliqualis habitudo?* Quid denique *habitudo?* Neque hoc usquam definivit, neque quantitatem.

Ideam rationis (de qua hoc loco Euclides) omnes perfectam habent. Mercator scit, ex quantitate collatæ a se pecuniæ, quantum habere debet lucri. Colonus non ignorat quantum usum agri communis

CAP. XI.
De ratione.

habere debet, ex quantitate agri sibi proprii. Mercator, qui tertiam partem collatæ pecuniæ contulit, statim dicet debere* sibi tertiam partem lucri. Colonus qui possidet tertiam partem agri privatim, prompte postulabit tertiam partem usus agri communis. Unusquisque enim videt inesse in ea re comparationem quantitatis ad quantitatem, quantitatis expensi ad quantitatem accepti. Sed ideam hanc ita oratione generali adæquate complecti, ut inde regulas generales demonstrare possit, non facile potest unusquisque. Juxta hanc ideam vulgarem, proportionem in numeris optime definivit Euclides, Def. 24. Elem. vii: etsi eo loco non rationem, sed proportionem dicat. Proportionem autem in alio sensu dicit in Def. 4. Elem. v, pro rationum similitudine. Quod parvi momenti peccatum est, nisi quod inconstantia in vocabulis signum sit obscuritatis in intellectu. Sed ideam illam quam habuit Euclides *a partibus iisdem numerorum*, magnitudinibus quæ non semper sunt ut numerus ad numerum adaptare non potuit. Itaque omissa illa responsione *partium ad partes*, coactus est ideam aliam quærere tum magnitudinum, tum numerorum communem. Noverat in quatuor proportionalibus primum ad secundum *ita se habere*, (Græce, οὕτως ἔχειν), ut tertium ad quartum. Itaque a cogitatione vocis *ita habeat*, quasi ab idea ipsa rei (converso verbo ἔχειν in nomen σχέσις, seu verbo *habere* in nomen *habitudo*) formavit rationis definitionem illam sterilem, *ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis secundum quantitatem habitudo quædam*: sonum verborum secutus pro idea rei.

Antequam rationem definiam, necessarium est

* Sic edit. 1668. Quære *deberi?*

De ratione.

definire quantitatem, et quantitatum diversa genera inter se distinguere. Interroganti enim *quantum est*, qui ita respondet ut interrogantis animus acquiescat in eo quod respondetur, necesse est ut magnitudinem de qua quæritur vel exponat ad oculos, vel determinet per comparationem cum alio quanto per mensuram determinato. Animus enim in indefinitis non acquiescet.

Sed quia non omnia quanta mensurantur per lineam, nec per superficiem, nec per solidum, totidem erunt genera mensuræ quot sunt genera quantorum. Corpus mensuratur tot mensuris quot habet dimensiones, et proinde tria habet diversa genera quantitatum, nempe lineam, superficiem, et soliditatem: quarum quantitatum unius pars, pars alterius esse non potest. Et in universum, quantitates illæ diversi generis sunt, quarum pars unius non est pars alterius: vel ut definitur ab Euclide, quarum una, quantumvis multiplicata, nunquam alteram superabit.

Lineæ ergo omnes, sive rectæ sive curvæ, ejusdem sunt generis quantitates: et quia curva extendi potest, ita ut fiat, non mutata quantitate, recta, altera earum multiplicata alteram superare potest.

Ab his tribus generibus Clavius excludit numerum, tanquam genus ab omnibus tribus diversum. Non recte. Numerus semper est in eodem genere quantitatis cum numerato. Neque genere differunt unum et plura. Numerus autem et plura, idem sunt. Numerus linearum, et lineæ, habent idem genus quantitatis: item numerus angulorum, et angulus; temporum, et tempus, etc. Quod Clavius lineam finitam et lineam infinitam ejusdem esse generis negat, superfluum est: tanquam si quis di-

CAP. XI. De ratione.

ceret *ens* et *non-ens* esse diversi generis: linea enim infinita nulla est. Quod autem dicitur in mathematicis *infinitum*, id significat solummodo indeterminatum, sive indefinitum, id est, quod quantum sit non est dictum.

Distinguendum etiam est inter quantum et quantitatem, quorum unum nunquam dicitur de altero.

Præterea etsi magnitudo, ut longitudo, superficies, soliditas, solis corporibus tribui proprie possunt, quantitas tamen multis aliis rebus tribui recte potest. Quicquid enim est de quo vere dicimus, quod majus vel minus alio est, vel æquale, vel de quo vere dicitur magis vel minus vel æqualiter est: habet illud quantitatem et dimensionem, vel unam vel plures. Et proinde, tempori sua quantitas est, quæ exponi potest per lineam. Motui est sua sibi quantitas, exponenda per lineam. Etiam vis habet suam sibi quantitatem, exponendam per lineam vel planum. Et pondus quantitatem suam, quæ exponi potest etiam per lineam vel solidum. Nec tamen inde inferri potest, aut tempus, aut motum, aut vim, aut pondus, esse lineam aut aliam magnitudinem.

Denique ratio, quoniam ratio alia alia major est vel minor, quantitatem habet, et per duas lineas exponitur. Quandocunque enim exponuntur duæ lineæ, non modo exponuntur ipsæ, sed etiam ipsarum ratio. Ratio enim est, ut eam definiam, *magnitudinis ad magnitudinem relatio.* Neque exponi potest nisi per duas lineas, quarum altera antecedens altera consequens, ut in omnibus fere aliis relationibus, appellatur.

CAP. XII.

DE IISDEM RATIONIBUS.

CAP. XII. De iisdem rationibus.

DEFINITIO sexta: *in eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, et tertia ad quartam, cum primæ et tertiæ æque multiplicia a secundæ et quartæ æque multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque vel una deficiunt, vel una æqualia sunt, vel una excedunt: si ea sumantur quæ inter se respondent.*

In hac definitione nulla mentio est *habitudinis unius magnitudinis ad aliam*, cum tamen ex definitione Euclidis verba illa sunt de rationis essentia. Itaque aut definitio *rationis*, aut definitio *ejusdem rationis*, vitiosa est. Neque axioma est, quia non est lumine naturali cognoscendum. Neque est ex antecedentibus demonstrabile. Neque denique de quantitate continua demonstrabile est ex subsequentibus. Et tamen vera est propositio, et conversa propositionis 12 hujus Elementi v. Demonstrari autem potest per definitionem quam ego posui hanc: *ratio est duarum magnitudinum secundum quantitatem relatio:* et demonstratam vidi.

Clavius, sentiens (ut puto) definitionem hanc egere defensione, longam, de causa propter quam "Euclides quatuor magnitudines proportionales et non proportionales per earum æque multiplicia definierit," orationem instituens, nullam adfert causam aliam, præterquam quod, propter multarum magnitudinum incommensurabilitatem, coactus sit investigare aliquid quod certum sit convenire qui-

CAP. XII.
De iisdem rationibus.

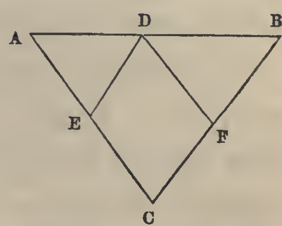
buscunque numeris eandem habentibus proportionem; deinde idem demonstrare convenire etiam in commensurabilibus. Hoc tamen nusquam præstitum est. Itaque idem est ac si dixisset, ideo illum proportionalia sic definiisse, quia definitionem meliorem nondum poterat reperire.

Exponantur quatuor numeri proportionales, 8 : 4 : : 6 : 3. Vides hic duas relationes totius ad dimidium: sunt enim totum et dimidium relativa, et relatio totius 8 ad dimidium suum 4, eadem relatio quæ totius 6 ad suum dimidium 3. Idem dici etiam potest de tertiis, quartis, etc., æque ac de dimidiis. Patet ergo rationem esse relationem: et rationem eandem esse relationem eandem. Et propterea proportionem in numeris per *partes easdem* recte definivit Euclides. Sed invenire debuit aliquid quod rationibus etiam magnitudinum incommensurabilium conveniret. Cur autem non fecit? An impossibile erat? Nescio, nisi quod sit difficile. Duæ lineæ simul atque ductæ sunt, habent inter se rationem suam, quæcunque ea sit. Et quæ causa efficiens erat ipsarum linearum, eadem erat et causa ejus quam habent inter se rationis. Causa ipsarum linearum efficiens erat ductio, id est, motus: quare etiam causa efficiens rationis quam habet earum altera ad alteram, erat motus ille idem, ex quo motu lineæ ipsæ ortæ sunt. Etiam ratio illa eadem erat in motibus ipsis, quibus illæ lineæ erant descriptæ. Quærenda ergo est rationis duarum linearum inæqualium *identitas*, sive *æqualitas*, sive *similitudo* (quæ tria nomina in rationibus idem significant) in motuum inæqualium aliqua similitudine, id est, in responsione partis ad partem vel portionis ad portionem: sive illæ partes aliquo-

tæ sint, sive non sint. Itaque qui tales motus excogitaverit, proportionalia ipsa determinabit, ductisque lineis rectis determinabit exponetque oculis.

CAP. XII.
De iisdem rationibus.

Factu autem difficile non est. Nosti enim, motu sive ductu lineæ uniformi partes lineæ descriptas æqualibus temporibus, semper esse inter se æquales. Item si linea descripta sit eadem semper velocitate, partes ejus æqualibus temporibus descriptæ esse etiam inter se æquales.



Sit recta AB descripta motu uniformi, in tempore quocunque: et in parte aliqua ejusdem temporis, eodem motu uniformi descripta sit AD pars rectæ AB. Quoniam ergo motus uniformis erat in omnibus partibus æqualibus temporis, descriptæ erunt partes æquales tum totius rectæ AB, tum rectæ AD: sive illæ partes toti AB sint, vel non sint, commensurabiles.

Eodem tempore, motu uniformi quidem ut ante, sed tardiore, sit descripta recta AC, faciens cum AB angulum quemcunque BAC: et quo tempore descripta erat AD, eodem intelligatur descripta AE. Quare in rectis AC, AE, pro partibus sive portionibus sumptis in AB, portiones æquales semper describentur in AC: eodem modo quo tota AB respondet toti AC, et pars AD parti AE.

Habebunt ergo partes æquales factæ æqualibus temporibus in AC ad partes æquales factas æqualibus temporibus in AB eandem rationem, singulæ ad singulas, quam habet tota AC ad totam AB, sive etiam quam habet AE ad AD. Etiam partes omnes æqualibus temporibus factæ in EC, (differentia inter AC, AE), ad partes omnes æqualibus tempori-

CAP. XII.

De iisdem rationibus.

bus factas in BD, (differentia inter AB et AD), singulæ ad singulas, eandem habebunt rationem quam AC tota ad AB totam, vel AE pars ad AD partem.

Quare si AB et AD sint incommensurabiles, et proinde etiam AC, AE incommensurabiles; intelliganturque quotlibet partes æquales sumptæ in AB, ita ut restet ad complendam AB pars minor quam una earum partium; et totidem partes æquales intelligantur sumptæ in AD, ita etiam ut restet ad complendam rectam AD minor quam una harum partium; fiatque idem in rectis AC, AE: omnes illæ partes æquales simul sumptæ in AB, habebunt eandem rationem ad totam AB, quam habent partes similes æquales sumptæ in AC ad ipsam AC; et quam habent omnes similes partes æquales sumptæ in AD ad ipsam AD; et quam habent omnes similes partes æquales sumptæ in AE ad ipsam AE.

Eædem ergo sunt rationes, quas determinat sive exponit motus uniformis (id est, motus æqualibus temporibus æquales rectas describens) eodem tempore: nempe, ratio AB ad AC, vel AD ad AE, vel differentiæ DB ad differentiam EC, sive in commensurabilibus sive in incommensurabilibus.

Quare *rationes easdem* definio esse *illas, quas exponit in duabus rectis motus uniformis æqualibus temporibus:* vel universalius, *in eadem ratione sunt, quæ determinantur a causa quacunque temporibus æqualibus æqualia efficiente.*

In eadem figura, si jungatur BC, et ducatur DF parallela EC secans BC in F: erit triangulum BDF simile toti triangulo BAC, propter angulos ad A et D æquales, et angulum ad B communem. Similes autem figuræ non sunt quæ differunt plus quam

CAP. XII.
De iisdem rationibus.

magnitudine: nam si non essent æquiangulæ, aut non haberent latera circa æquales angulos proportionalia, non esset inter eas ulla figuræ similitudo. Eadem ergo est ratio AB ad DB, quæ CA ad DF. Sed ut AB ad BD, ita ostensa est esse CA ad EC. Sunt ergo DF et EC æquales: et proinde (ducta DE) triangula ADE, ABC sunt similia.

Ad definitionem hanc, propositiones illæ quæ sequuntur in Elemento quinto, de permutatione, conversione, compositione etc., rationum, accurrunt: et ad lucem ejus omnes fere sese demonstrant. Euclidis autem demonstrationes duplo plures sunt, propterea quod idem in quantitate continua seorsim a numeris demonstrat: et multo longiores quam erat necesse, propter sterilitatem definitionis rationis.

"Sed quid", inquies, "opus est theorematum pure geometricorum demonstrationes a motu petere?" Respondeo primo: demonstrationes omnes, nisi scientificæ sint, vitiosæ sunt; et nisi a causis procedant, scientificæ non sunt. Secundo, nisi conclusiones a constructione, id est, a descriptione figurarum, id est, a linearum ductione demonstrentur, vitiosæ sunt. Jam omnis linearum ductio motus est: itaque vitiosa est omnis demonstratio, cujus principia prima non continentur in definitionibus motuum quibus figuræ describuntur. Sed post theoremata aliquot prima demonstrata, cætera ab his dependentia non egent demonstratione quæ fit a motu, ut quorum demonstrationes in demonstrationibus priorum continentur: nec alia re egent, ut intelligantur, præter illorum priorum explicationem, vel conversionem.

CAP. XIII.

DE RATIONUM CALCULO.

CAP. XIII.

De rationum calculo.

Definitio decima irreprehensibilis est, nempe hæc: *Cum autem tres magnitudines proportionales fuerunt, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam: at cum quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam: et semper deinceps, uno amplius quamdiu proportio extiterit.*

Est autem quod reprehendi potest et debet in expositione hujus definitionis apud Clavium. Sic enim scribit: "Interpretes nonnulli colligunt ex hac definitione, si proponantur plures quantitates continue proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam esse duplam proportionis primæ quantitatis ad secundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem hujus. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, esse triplam proportionis quam habet prima quantitas ad secundam, etc. Quod tamen nulla est ratione concedendum. Neque enim Euclides hoc significare voluit, sed docuit tantummodo proportionem primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam ejus proportionis quam habet prima quantitas ad secundam; propterea quod inter primam quantitatem ac tertiam reperitur quodammodo proportio primæ quantitatis ad secundam duplicata; quippe cum inter primam quantitatem ac tertiam interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad secun-

De rationum calculo.

dam, et sic de cæteris, ut diximus. Non autem intelligit illam duplam esse hujus, ne theorema proponeret, quod merito quispiam concedere recusaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continue proportionalibus, 25—5—1, proportionem 25 ad 1 duplam esse proportionis 25 ad 5: cum potius eam quis dixerit esse quintuplam ?"

In illis qui putant, positis tribus continue proportionalibus, rationem primi ad tertium duplam esse rationis primi ad secundum; item positis quatuor proportionalibus, rationem primi ad quartum triplam esse primi ad secundum, ubi primum est omnium maximum: etiam ego sum. Exempli gratia: in his numeris, 8—4—2—1, dico rationem 8 ad 1 esse triplam rationis 8 ad 4; et sesquialteram rationis 8 ad 2; et rationem 8 ad 2 duplam esse rationis 8 ad 4. Non solum quia Euclides rationes illas triplicatas vel duplicatas appellat, sed quia verum est, et lumine naturali æque manifestum ac unum et unum esse duo, aut unum et duo esse tria.

Vox qua utitur hoc loco Euclides, nempe διπλασίων, et vertitur a Clavio *duplicata*, aliis in locis utitur pro dupla. Primo in Prop. 20. Elem. iii. Itaque angulus in centro, non minus dicitur duplicatus anguli in circumferentia, quam duplus. Etiam a Clavio vertitur vox illa Græca διπλασίων non modo per *duplex*, sed etiam per *duplus;* in propositione ipsa et in conclusione per *duplex*, scilicet ne dissentire videretur propositio a conclusione; sed in demonstratione, per *duplus*. Si ergo *duplicatum, duplex*, et *duplum*, in quantitatibus non idem significant, non debuit illis uti ut idem significantibus.

Rursus in propositione ultima Elem. ix, eadem

CAP. XIII.

De rationum calculo.

voce Græca utitur Euclides pro ratione 2 ad 1 vel 4 ad 2, ubi rursus Clavius illam reddit per *duplam*. Nonne ergo et ipse Clavius, ex eo quod dixit Euclides duplicatam, intellexit (sicut alii) duplam? Qui verbi ejusdem significationem modo unam modo aliam facit, mihi quidem videtur subjectam rem nullo modo intelligere. Quo autem nomine appellabunt rationem 8 ad 4 comparatam cum ratione 8 ad 2? Dicent illam esse hujus *subduplicatam*, et rationis 8 ad 1 *subtriplicatam*. Numerum autem numeri subduplum dicent, non subduplicatum; et numerum 2 numeri 6 non subtriplicatum, sed subtriplum: nomina Latinæ genti inaudita. Itaque cessantis jam linguæ verba, quæ velut testamenta morte confirmata sunt, et quæ mutari non debent, suo arbitrio sine necessitate mutat. Quid enim omnino significat subduplum aut subduplicatum, si significat aliquid præter dimidium: aut subtriplum vel subtriplicatum, præter tertiam partem. Retinebo ergo vocabula propria, duplicatum vocans etiam duplum, et triplicatum triplum; nec pro subduplicato et subtriplicato dubitabo dicere dimidium, et tertiam partem, vel (si libet) trientem. Etiam in rationibus (quanquam id non concedat Clavius) similiter dicam, nisi id falso dici ostendat. Quod enim rogat, "Quis affirmabit in his numeris continue proportionalibus 25—5—1, proportionem 25 ad 1 duplam esse proportionis 25 ad 5: potius eam quis dixerit esse quintuplam": nihil probat. Quid, quia terminus primus est quintuplus secundi, et secundus tertii: ob eam causam dixerit aliquis rationem 25 ad 1, quintuplam esse rationis 5 ad 1, potius quam duplam? Manifestum est rationem 25 ad 5 esse

CAP. XIII. De rationum calculo.

rationem unicam, et rationem 5 ad 1 esse etiam unicam et ipsi æqualem ; et rationem 25 ad 1 componi ex illis rationibus duabus æqualibus. Quid aliud ergo negat Clavius, nisi rationem ex duabus rationibus æqualibus compositam constituere unius earum duplam? Cur autem hoc negat? Quia numerus 25 numeri 5 est quintuplus: scilicet oblitus quæstionis, quæ non instituitur de numero vel magnitudine aliqua absoluta, quæ sit alterius quintupla, sed de ratione quæ est magnitudo comparativa; itaque rationem unicam 25 ad 5 computavit pro quinque rationibus. Natus est error Clavii, ex eo quod vulgo apud mathematicos vocabatur ratio quintupli ad simplum quintupla ratio, et ratio dupli ad simplum (ut Elem. ix. Prop. ult.) ratio dupla, imperite et falso: nam ratio 2 ad 1 non est ratio dupla, sed simpla, nempe dupli ad simplum. Neque quicquam valet quod illustrationis causa subjungit, quemadmodum etiam proportio octupla dupla est proportionis quadruplæ: cum tamen quadruplæ duplicata sit sedecupla, ut hic patet 16—4—1. Difficile conceptu est quomodo octupla proportio magis sit quadruplæ dupla, quam octuplicata sit quadruplicatæ duplicata. Esto autem octupla proportio quadruplæ dupla. Quid sequitur? Nonne, quemadmodum in his numeris 16 unitates duplæ sunt octo unitatum; ita sedecem rationes duplas esse octo rationum: et proinde etiam duas rationes, 16 ad 4, et 4 ad 1, duplam esse rationis 16 ad 4, vel 4 ad 1; id quod Clavius demonstratum nollet?

Postremo, objiciens quærit, in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, ut 4. 4. 4, atque adeo continue proportionalibus,

CAP. XIII.
De rationum calculo.

qui fieri potest ut proportio primi ad tertium dupla sit proportionis primi ad secundum, cum sit omnino eadem? Profecto si ratio 4 ad 4, nempe ratio æqualis ad æquale, id est, ipsa æqualitas, quantitas sit, valida est objectio. Sin quantitas non sit, frivola est: cum nihil ad nihil additum, vel per nihil multiplicatum semper facit nihil. Antequam autem ad hanc et alias ejus objectiones respondeam, non abs re erit *quantorum* genera amplius ex ipsis Euclide et Clavo distinguere, et quid sit rationum *additio* et *subtractio*, ex iisdem explicare: et cur in tribus continue proportionalibus, quorum primum est maximum, rationem primi ad tertium duplam esse dixi rationis primi ad secundum; non tamen quando primum est minimum.

CAP. XIV.

ADHUC DE RATIONUM CALCULO.

Definitio quinta Elementi sexti hæc est: *Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem:* et vera est. Nam si sint proportiones illæ duæ eædem vel non eædem, sive prima maxima sit vel non maxima, semper illis conveniet definitio. Exempli gratia: in his numeris, 4—2.6—3, ubi rationes sunt eædem, si multiplices inter se antecedentes 4 et 6, qui faciunt 24, et consequentes 2 et 3, qui faciunt 6: ratio nascens erit ratio 24 ad 6, id est 4 ad 1, id est, duplicata rationis 4 ad 2

De rationum calculo.

vel 6 ad 3. Rursus in iisdem numeris inversis, 2—4. 3—6, multiplicatis inter se tum antecedentibus tum consequentibus, oritur ratio 6 ad 24 sive 1 ad 4, quæ est duplicata rationis 2 ad 4. Rursus sint rationes non eædem, ut in his numeris, 4—2. 6—4, multiplicatis tum antecentibus tum consequentibus gignetur ratio 24 ad 8 sive 12 ad 4. Expositis autem his numeris, 12—6—4, erit ratio 12 ad 6 eadem cum ratione 4 ad 2, et ratio 6 ad 4 eadem quæ ante. Idem in horum conversis continget, 2—4. 4—6. Atque hinc intelligere licet, quid sint illæ quas appellat Euclides rationum quantitates, nempe rationum antecedentes et consequentes. Nec tamen voluit tantam esse rationem quanta est antecedens, aut quanta est consequens ejus: quarum utraque est quantitas absoluta, sed neutra earum ratio. Quantitatem autem rationis 4 ad 2 interpretatur Clavius per fractionem $\frac{4}{2}$, et rationem 6 ad 3 per $\frac{6}{3}$: quas appellat etiam rationis denominatores. Quas si inter se multiplices, habebis quidem fractionem cujus numerator ad denominatorem rationem habet compositam ex rationibus 4 ad 2 et 6 ad 3: propterea quod etiam sic multiplicantur inter se tum antecedentes tum consequentes, ut prius. Non est autem fractio $\frac{24}{6}$ nec $\frac{4}{1}$ ratio composita, nec omnino ratio, cum sit pars quantitatis absolutæ. Aliud enim est $\frac{4}{1}$, id est 4, aliud ratio quaternarii ad unitatem. Ratio enim duabus lineis exponitur semper, at quantitas absoluta unica.

Quod Clavius hic scribit: "Quoniam denominator cujuslibet proportionis exprimit quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem, dici solet propterea quantitas rationis": recte quidem dicit

CAP. XIV.

De rationum calculo.

exprimit, non recte autem arithmetici dicunt *esse*, nempe, quotientem divisionis numeri per numerum esse rationem ipsam divisi ad divisorem: unde multa in geometriam irrepserunt absurda, et plura indies consequentur; quorum causa magna ex parte fuit Clavii hæc impropria locutio. Qualis etiam videtur tibi hæc oratio in mathematicis: *quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem?* Debebat enim dicere, *quanta est magnitudo antecedens ut comparata cum consequente*, vel *quanta est ratio magnitudinis antecedentis ad magnitudinem consequentem.* Scio Clavium linguæ Latinæ scientissimum fuisse: sed huic illius sententiæ de compositione rationum inimica erat elocutio clara.

CAP. XV.

ETIAM DE RATIONUM CALCULO.

Clavius ex hac definitione quinta Elementi sexti recte infert, *quod in magnitudinibus quibuscunque ordine positis, proportio primæ ad ultimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam, et secundæ ad tertiam, et tertiæ ad quartam, etc.* Cujus etiam demonstrationes aliquot adfert ex Theone, Vitellione, Eutocio et Apollonio: ita ut nullo modo a Clavio negari possit, qui eandem in numeris pro definitione ad Elem. vii posuit. Itaque in tribus lineis A, B, C ordine expositis, ratio A ad C componitur ex rationibus A ad B et B ad C: et rursus ratio C ad A componitur ex ratione C ad B et ratione B ad A.



De rationum calculo.

Per definitionem quintam Elem. v, quæ hæc est: *Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese mutuo superare:* explicat Euclides, ut recte dicit Clavius, quidnam requirant duæ quantitates ejusdem generis ut rationem dicantur habere, nempe, si non habeant hanc conditionem ut altera possit multiplicata alteram superare, non esse illas neque ejusdem generis, neque habere inter se rationem.

Unde manifestum est, primo, lineam, superficiem, et solidum esse diversa genera, vel potius diversas species quantitatis. Nulla enim harum quantumvis multiplicata alteram superabit.

Secundo, angulus genitus ex motu circulari, et angulus contactus, diversæ sunt species quantitatis. Angulus enim contactus nulla unquam multiplicatione superabit angulum genitum ex motu circulari.

Tertio, ratio majoris ad minus, et ratio minoris ad majus, sunt diversæ species quantitatis. Nam ratio minoris ad majus, quanto magis multiplicatur, tanto semper minor est.

CAP. XVI.

ETIAM DE RATIONUM CALCULO.

Clavius, ad prop. 23, Elem. vi, aliam habet methodum componendi rationes. Sint duæ rationes 6 ad 4 et 2 ad 8 componendæ. Fiat ut 2 ad 8, ita consequens 4 ad aliam 16: eritque ratio 6 ad 16 composita ex rationibus 6 ad 4 et 2 ad 8. Positis enim ordine his numeris 6, 4, 16, priores duæ

CAP. XVI. De rationum calculo.

habent rationem 6 ad 4, posteriores duæ rationem 2 ad 8.

Habet etiam methodum auferendi rationem minorem a majore. Sit ratio 1 ad 4 auferenda ratione 2 ad 4. Fiat ut 2 ad 4, ita antecedens 1 ad aliam 2: et collocentur ordine tres numeri 1, 2, 4. Ratio 1 ad 4 componitur ex rationibus 1 ad 2, et 2 ad 4. Quare ablata ratione 2 ad 4 ex ratione 1 ad 4, reliqua est ratio 1 ad 2.

Similiter, si ex ratione 3 ad 2 auferenda sit ratio 2 ad 3, fiat ut 2 ad 3, ita 3 ad aliam $4\frac{1}{2}$. Nam positis ordine, 3, $4\frac{1}{2}$, 2; ratio 2 ad 3, id est, ratio 3 ad $4\frac{1}{2}$, aufertur a ratione 3 ad 2, et relinquitur ratio $4\frac{1}{2}$ ad 2. Atque hæ methodi ambæ comprobantur a Clavio ad prop. 23, Elem. vi.

CAP. XVII.

RESPONSIO AD QUÆDAM QUÆSITA CLAVII.

Respondeo jam ad quæsita Clavii, et primo ad hoc: *Qui fieri potest, ut positis tribus magnitudinibus æqualibus* 4, 4, 4, *ratio primæ ad tertiam dupla sit rationis primæ ad secundam, cum sit omnino eadem?*

Quoniam ratio primæ 4 ad secundam 4, quantumvis multiplicata nunquam superabit rationem eandem 4 ad 4, neque quantumvis per medias interpositas divisa ab illa superabitur: manifestum est rationem 4 ad 4 (et in universum, æqualis ad æquale) non esse quantitatem, neque posse æqualitates alias aliis majores vel minores esse. Inæqualitatum autem alia alia major esse potest, et

CAP. XVII.

Responsio ad quædam quæsita Clavii.

proinde habet quantitatem. Jam quod quærit Clavius, quomodo positis ordine 4, 4, 4, ratio primæ ad tertiam dupla esse potest rationis primæ ad secundam, idem est ac si quæsiisset, quomodo positis tribus cifris 0, 0, 0, ratio primæ ad tertiam potest esse dupla rationis primæ ad secundam: cum revera et proprie loquendo, unum nihil alterius nihil neque duplum neque duplicatum est.

Rursus Clavius, ad finem Elem. ix, ut probet rationem duplicatam non esse rationem duplam, sic scribit: "Imprimis igitur compositionem proportionum," (vocabulis enim ratio et proportio aliter quam Euclides promiscue utitur), "de qua Euclides agit Def. 10, lib. v, etc., et in propositionibus duplicatam, triplicatam, et compositam proportionem de magnitudinibus vel numeris demonstrat, dico non esse vere additionem proportionum, ita ut duplicata vel triplicata proportio sit duplo aut triplo major ea proportione cujus illa dicitur duplicata, triplicatave; item ut proportio ex pluribus proportionibus composita sit vere totum quippiam, cujus partes sunt proportiones ex quibus dicitur composita. Nam, etc. Si positis his terminis continue proportionalibus, 1. 10. 100, proportio 1 ad 100 non solum duplicata diceretur proportionis 1 ad 10, sed vere esset duplo major, etc., quis non videt partem esse majorem toto?"

Respondeo primo non videri mihi recte illatum, ex eo quod 1. 10. 100 sunt continue proportionales, et ex eo quod ratio 1 ad 10 major sit ratione 1 ad 100, partem esse majorem toto.

Secundo, si illatio legitima sit, necesse est, quanquam absurda sit, sit tamen vera. Nam ipse Clavius utrumque affirmat, nec quisquam negat, nempe, et

CAP. XVII.

Responsio ad quædam quæsita Clavii.

rationem 1 ad 100 esse totum, cujus pars est ratio 1 ad 10; et rationem 1 ad 10 majorem esse ratione tota 1 ad 100. Itaque si qua hic vere subsit absurditas, Clavii est: nec solum illorum qui dicunt rationem duplicatam esse duplam. Latet autem illa vel in assumpto hoc: *In magnitudinibus quibuscunque ordine positis, rationem primæ ad ultimam composita est ex rationibus intermediis:* vel in diverso genere rationis majoris ad minus a genere rationis minoris ad majus. Quare proprietates tum rationum ordine positarum, tum utriusque generis rationum, diligentius paulo considerabimus.

Et primo, in rationibus ejusdem generis, sive magnitudines decrescant perpetuo a majore ad minus, sive perpetuo crescant a minore ad majus, compositio vera est. Sint enim tres numeri 100, 10, 1, quæ rationes sunt majoris ad minus. Manifestum est rationem 100 ad 1 compositam esse ex rationibus 100 ad 10 et 10 ad 1, eandemque tum duplicatam tum duplam esse rationis utriusvis 100 ad 10, vel 10 ad 1. Item inversim, ubi rationes 1. 10. 100 sunt minoris ad majus, manifestum est rationem compositam 1 ad 100 æqualem esse ambabus rationibus 1 ad 10 et 10 ad 100 inter se æqualibus.

Deinde in his numeris 16, 4, 2, manifestum est rationem compositam 16 ad 2 æqualem esse duabus rationibus 16 ad 4, et 4 ad 2: quarum prima ratio secundæ est duplicata, tota autem ejusdem secundæ triplicata. Item in his numeris illorum inversis 2, 4, 16, composita ratio 2 ad 16 æqualis est duabus rationibus quarum secunda est primæ duplicata, composita autem ejusdem primæ triplicata.

CAP. XVII.

Responsio ad quædam quæsita Clavii.

Etiam in tribus aliis quibuslibet magnitudinibus, quarum prima est maxima, tertio vero minima, idem continget: ut in his numeris 12, 8, 2, ubi ratio primæ ad secundam est eadem quæ 3 ad 2, ratio autem secundæ ad tertiam eadem est quæ 2 ad $\frac{1}{2}$. Componamus has primo juxta definitionem traditam ab Euclide, Def. 5, Elem. vi, per multiplicationem inter se tum antecedentium tum consequentium. Oritur autem ratio 12 ad 2, cujus partes componentes erunt rationes 3 ad 2 et 2 ad $\frac{1}{2}$; id est, (multiplicatis omnibus terminis per 4), ratio 12 ad 2 composita ex rationibus 12 ad 8, et 8 ad 2.

Deinde componamus easdem per regulam compositionis aliam, traditam a Clavio ad Prop. 23. Elem. vi. Fiat ergo ut 3 ad 2, ita 2 ad aliam, $\frac{1}{2}$. Expositisque numeris 3, 2, $\frac{1}{2}$, erit ratio composita 3 ad $\frac{1}{2}$ æqualis rationibus componentibus 3 ad 2 et 2 ad $\frac{1}{2}$. Nam multiplicatis omnibus terminis per 4, nascentur numeri 12, 8, 2, iidem qui prius.

Itaque nihil video quo minus propositio illa, nempe, *ratio primi* ad ultimam composita est ex rationibus intermediis,* pro vera habeatur. Adverto etiam obiter, rationes componendi methodum hanc Clavianam esse veram rationum additionem: non autem, ut vult Clavius, multiplicationem.

Quomodo autem eadem propositio, nempe, *rationem primi ad ultimum* compositam esse ex rationibus intermediis,* locum habeat quando una ratio est majoris ad minus, altera minoris ad majus, difficile explicatu est. Sint continue proportionales 1, 10, 100: sed alio ordine collocatæ, ut 1, 100, 10. Cum ergo per propositionem illam universa-

* Sic edit. 1668.

CAP. XVII.

Responsio ad quædam quæsita Clavii.

lem, ratio 1 ad 10 composita est ex rationibus 1 ad 100 et 100 ad 10, sicut totum ex partibus, erit ratio 1 ad 100 pars rationis 1 ad 10. Sed quota pars? Ea scilicet pars, quam geometræ nunc appellant subduplicatam rationis 1 ad 10. Quia vero ratio 1 ad 100 minor est quam ratio 1 ad 10, erit pars 1 ad 100 minor quam reliqua pars, quanto ratio una minor est quam duæ; et sunt ambæ rationes 1 ad 100 et 100 ad 10 partes rationis 1 ad 10, si modo ratio 100 ad 100 (quæ quantitas non est) pro quantitate computetur; alioqui ratio 100 ad 10 non potest esse pars rationis 1 ad 10. Neque enim duæ quantitates diversi generis, quales ostendi supra esse rationes minoris ad majus, et majoris ad minus, partes ejusdem quantitatis esse possunt.

Quo ergo sensu, inquies, verum est componi rationem 1 ad 10 ex rationibus 1 ad 100 et 100 ad 10? Respondeo, verum esse secundum verborum sensum proprium, nimirum, si ratio 100 ad 10, sive ratio 10 ad 1, addatur rationi 1 ad 100, nasci rationem compositam 1 ad 10 æqualem duabus rationibus 1 ad 100 et 10 ad 1. Id quod facilius intelliges, si prius duo illa genera rationum quomodo crescunt, minuuntur, componuntur, et alterum ab altero substrahitur, clare explicavero.

Sumantur ergo quinque magnitudines continue proportionales in ratione majoris ad minus: exempli causa, 81, 27, 9, 3, 1, quarum inversæ 1, 3, 9, 27, 81, sunt in ratione continua minoris ad majus; et media omnium est 9. In his, incipiendo a maxima, desinendo in media, tres primæ sunt rationes majoris ad minus; incipiendo autem a minima, desinendo in media, tres primæ sunt rationes minoris ad majus.

CAP. XVII.

Responsio ad quædam quæsita Clavii.

Rursus incipiendo a maxima, ratio primæ ad tertiam est major ratione ejusdem primæ ad secundam, nempe duplo major: contra, incipiendo a minima, ratio primæ ad tertiam minor est ratione primæ ad secundam, nimirum duplo minor.

Tertio, incipiendo a maxima, semper prima majorem rationem habet ad eam quæ proprior est tertiæ, quam ad eam quæ ab eadem tertia est remotior: contra vero, incipiendo a minima, semper prima minorem rationem habet ad eam quæ tertiæ proprior est, quam ad eam quæ a tertia est remotior.

Quarto, incipiendo a maxima, rationes sunt excessuum quibus majores superant minores: contra vero, incipiendo a minima, rationes sunt defectuum quibus minores deficiunt a magnitudine majorum.

Quinto, ratio tertiæ ad tertiam (quæ est æqualitas) in rationibus excessuum minor est omni ratione excessus: contra vero, ratio æqualitatis major est omni ratione defectus: et quia ratio æqualitatis quantitas non est, erit quantitas rationis defectus minor nihilo, tanto quanto ratio excessus ipsi respondens major est nihilo.

81.	27.	9.	3.	1.
2.	1.	0.	1.	2.

Exempli gratia: exponantur in margine eædem magnitudines proportionales: et quia ratio 81 ad 9 duplicata est rationis 27 ad 9, sub 81 ponatur 2; et sub 27 ponatur 1, quæ significent duplicatam rationem et unam rationem; ponatur autem cyphra sub 9, propterea quod ratio 9 ad 9 quantitas non est. Similiter sub 1 ponatur 2, et sub 3 ponatur 1. Vides itaque rationem 81 ad 9 duplo majorem esse ratione 27 ad 9, quia rationes illæ sunt ut duæ rationes excessus ad unam: item rationem 1 ad 9

CAP. XVII.

Responsio ad quædam quæsita Clavii.

duplo minorem esse ratione 1 ad 3, propterea quod sunt ambæ rationes defectus. Quoniam igitur ratio 1 ad 9 duplo minor est quam ratio 1 ad 3, manifestum est rationem 1 ad 3 duplo majorem esse quam ratio 1 ad 9.

His intellectis, ostendendum est quomodo in his numeris 1. 100. 10., ratio 1 ad 10 componitur ex rationibus 1 ad 100 et 100 ad 10.

Quoniam enim rationes 100 ad 10 et 10 ad 100 simul additæ faciunt rationem æqualitatis, id est, altera alterius quantitatem extinguit, restabit ratio 1 ad 10 pro summa rationum 1 ad 100 et 100 ad 10: ut qui unum dederit carenti duobus, facit ut careat tantummodo uno.

Atque hoc exacte convenit cum Def. 5. Elem. vi. Nam antecedentes rationum 1 ad 100 et 100 ad 10, sunt 1 et 100: consequentes autem 100 ad 10. Antecedentes in se multiplicatæ faciunt 100 : consequentes autem multiplicatæ in se faciunt 1000: sed ratio 100 ad 1000 eadem est cum ratione composita 1 ad 10. Componitur ergo ita ratio 1 ad 10 ex rationibus 1 ad 100 et 100 ad 10, ut partes componentes sint vere partes rationis compositæ. Sed rationes 1 ad 100 et 100 ad 10 non sunt partes ejusdem rationis compositæ 1 ad 10: neque esse possunt, cum sint diversi generis rationes.

Vides ergo rationem duplicatam duplam quoque esse, hoc est duplo majorem esse ratione quæ duplicari dicitur. Ut in iisdem proportionalibus 1, 10, 100, ratio defectus 1 ad 100, duplicata est rationis defectus 10 ad 100 (duplicata scilicet defectus ratione): et propterea etiam duplo major, quia sublatio defectus quantitatem auget.

Manifeste hinc sequitur theorema hoc universale.

CAP. XVII.

Responsio ad quædam quæsita Clavii.

Si fuerint quotcunque magnitudines continue proportionales, quarum prima est maxima; quanto prima ad aliam a se remotiorem quam est proxima, majorem rationem habet quam ad ipsam proximam; tanto in iisdem magnitudinibus, inverso ordine collocatis, minima majorem rationem habet ad sibi proximam, quam ad remotiorem in eadem distantia. Exempli gratia: in his magnitudinibus, 81. 27. 9. 3. 1, quanto major est ratio 81 ad 3 quam ratio 81 ad 27, tanto major est ratio 1 ad 3 quam ratio 1 ad 27: quanquam geometræ qui nunc sunt, id non concedant.

Sed ex iis quæ hactenus dicta sunt, constat naturam rationis ne Euclidi quidem penitus perspectam fuisse; multo autem minus Clavio; sed minime omnium illis, qui nunc algebristæ perhibentur. Nam hi, a Clavio docti denominatorem rationis indicare ipsius quantitatem, (ut 4, sive $\frac{4}{1}$, denominat indicatque quantitatem rationis 4 ad 1, et $\frac{2}{3}$ indicat rationem 2 ad 3: sunt autem illi denominatores nihil aliud præter quotientes natas ex divisione numeri per numerum), temere arripuerunt quasi rem demonstratam, *fractionem et rationem eandem esse rem*, nempe quantitatem absolutam et quantitatem comparativam; quæ comparativa, quantitas omnino non est nisi respectu ad aliam rationem. Rationis enim magnitudino non determinatur nec exponitur per unam lineam, sicut quantitas absoluta, sed per duas. Atque ab hoc errore tot absurda consequuta sunt, ut vix magno volumine commode contineri possint: quorum præcipua infra paucis considerabimus, una cum aliis quæ ex aliis principiis falsis in geometrarum scripta irrepserunt.

CAP. XVII.

Responsio ad quædam quæsita Clavii.

Numerat duodecem alia genera rationum Pappus, quorum duo considerat in Commentario ad Def. 6. Elem. v, Clavius: nimirum, rationem arithmeticam, et rationem harmonicam sive musicam. Atque arithmeticæ quidem satis bene convenit definitio rationis tradita ab Euclide. Nam quantitates duæ quarum una alteram superat quantitate determinata, habent inter se habitudinem quandam secundum quantitatem. Ratio autem quam harmonicam vocant, est habitudo quædam non duarum sed trium magnitudinum. De utraque satis multa et ingeniosa habet Clavius. Ratio autem arithmetica eadem est, cum quanto prima superat secundam vel ab ea superatur, tanto secunda superat tertiam vel ab ea superatur. Sed ratio harmonica eadem est, quando extremæ sunt inter se ut differentiæ a media sumptæ, major extrema ad majorem differentiam, et minor ad minorem.

Putasne in aliis scientiis majus peccatum inveniri posse, quam est in geometria non recte explicasse quid sit ratio? Quis scriptor ethicus usus est definitione *boni* non bona, vel politicus definitione *juris* vitiosa? Attamen ejusdem est in geometria momenti definitio rationis cujus est in doctrina ethica definitio *boni*, et in politica definitio *juris*!

Deinde, quod dicit Clavius, proportionem illam in tribus numeris, ubi major extremorum est ad minorem ut differentia majoris et medii ad differentiam medii et minoris, esse musicam seu harmonicam: temere dictum est. "In his", inquit, "numeris 6. 4. 3, est ut 6 ad 3, ita 2, differentia duorum majorum, ad 1, differentiam duorum minorum. Quoniam autem 6 et 3 faciunt consonantiam dia-

pason; 6 et 4 consonantiam diapente; et denique, 4 et 3 consonantiam diatessaron: vocari solet hæc proportio harmonica." Quod si ita sit, cur non etiam in his numeris, 6. 3. 2, vel in his, 42. 12. 7, quæ cadunt sub eandem definitionem, eædem sunt consonantiæ? Quare autem facit ratio 6 ad 3, vel totum quodlibet ad suum dimidium, consonantiam diapason, nescivit Clavius. Id enim primus omnium docuit Galilæus, postquam Clavius mortuus esset. Nugæ meræ sunt homine mathematico indignæ.

CAP. XVII. Responsio ad quædam quæsita Clavii.

Hactenus de principiis Euclidis. Sequitur principium aliud, quibus* utuntur hodie geometræ, tale.

CAP. XVIII.

DE RADICE NUMERICA ET LATERE QUADRATI.

Si quadrati duo latera angulum rectum continentia divisa fuerint, utrumque in quotlibet partes magnitudine et numero æquales, numerusque partium unius lateris multiplicatus sit per numerum partium alterius: id est, si duo illi numeri æquales multiplicentur inter se: factus erit numerus quadratorum, quorum latera sunt singulæ partes lateris totius quadrati. Exempli gratia: si quadrati latus sit longum 100 pedes, multiplicentur autem 100 pedes per numerum 100, unde factus erit decies mille pedes: erunt, ut illi assumunt, illi decies mille pedes totidem quadrata, quorum uniuscujusque latus sit unus pes; et decies mille pedes longitudine simul sumptos æquales esse toti quadrato. Similiter

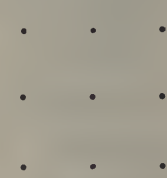
* Sic edit. 1666 et 1668.

multiplicatis 1000 pedibus per numerum 100, oritur cubus a toto latere. Potuerunt eadem ratione, diviso latere quadrati bifariam, ex multiplicatione 2 in 2 pronuntiare quatuor semilatera æqualia esse ipsi quadrato.

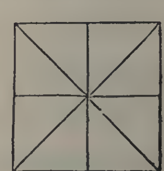
Hæc tu absurdiora esse putabis, quam ut quisquam ita computaret. Sed ita est: nec moniti, ab illa computatione desistunt. Ita computavit geometra quidam, qui, propter librum quem inscripsit *Mesolabium*, celebris est: monitusque erroris, respondit ita se computasse sicut computarunt geometræ omnes qui fuerunt, qui sunt, et qui post erunt aliis in annis. Nihil ergo hic calumniæ est. Quid autem illos a sensu communi seducere tantum potuit?

Decepit illos, primo, idea quadrati numeri qualis appingitur, in qua latera multiplicata in se faciunt numerum quadratum.

Secundo, decepit illos, quod crediderint eandem esse rem, multiplicare partes inter se et ducere unum latus in alterum: juxta ideam quadrati geometrici talis, ubi tria latera multiplicata per 3 æqualia esse volunt ipsi quadrato.



Tertio, decepit illos authoritas Archimedis, (cujus hominis propter stupendissimum ingenium mentionem hoc loco invitus facio), qui magnitudinem circumferentiæ circuli per hujus modi multiplicationem demonstrare conatus est. Deinde, sæculo proxime superiore, in calculo *subtensarum* eadem methodo usus est Copernicus et Regiomontanus in doctrina triangulorum, et postremo Clavius in tabulis condendis sinuum, tangentium, et secantium.

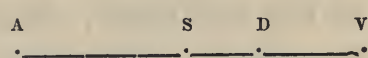


CAP. XVIII.

De radice numerica, etc.

Ex hoc errore nascitur alius, nempe, radicem numeri quadrati esse quadrati geometrici latus. Siquidem enim multiplicatio numeri producat quadratum geometricum, necessario sequetur radicem numeri facti esse ipsum latus. Non videbant enim, in numeris quadratum numerum et radicem ejus esse ambo earundem rerum numeros: et proinde radicem numeri quotcunque quadratorum numerum esse etiam quadratorum, quemadmodum radix centum hominum sunt decem homines.

Postremo decepit illos, quod eandem rem esse putarint latus quadrati geometrici et radicem quadrati numeri. Itaque regulam algebræ, quæ regula est pure arithmetica, ad geometriam imperite applicantes, ex ingeniosissima reddiderunt absurdissimam, pro linea, quadrato, et cubo, unitatem promiscue supputantes. Exempli gratia: cum scripsisset quidam, si AD ponatur dupla DV, et a tota AV detrahatur AS media proportionalis inter ipsas AD et DV, quæ relinquitur VS, erit major duarum mediarum proportionalium inter ipsas AD, DV: ad hoc confutandum sic ratiocinatus est professor quidam geometriæ publicus:



"Ponatur DV æqualis 1. AD erit 2. Ponatur AS media proportionalis inter AD, DV, et detrahatur ab AV. Relinquetur VS.

"Ergo VS æqualis est 3 minus $\surd 2$.

"Quæ multiplicata in se cubice, facit 45 minus $\surd 1682$, quod minus est quam quatuor cubi a DV: quia 45 minus $\surd 1681$, æquales sunt quatuor cubis a DV.

"Cum ergo cubus ab AD sit 8, erit cubus ab VS

CAP. XVIII.

De radice numerica, etc.

minor dimidio cubo ad AD, id est, minor majore mediarum inter AD et DV."

Non disputo hoc loco an major mediarum duarum revera sit VS, sed specimen exhibeo algebræ hodiernæ, per quam DV est linea 1; et per consequens AD est 2 lineæ; et per consequens, secundum hujusmodi algebristas, cubus AD æqualis est 8 lineis; et 45 quadrata a DV minus $\sqrt{1681}$ æqualia quatuor lineis, nempe, quadruplus rectæ DV.

Reputa tecum an hæc non sint magis absurda, quam ulla quæ inveniri possunt in ethicis aut politicis Platonis aut Aristotelis.

Regula autem algebræ talis est: theorema quod quæritur, supponatur verum esse; vel quod faciendum est, supponatur factum. Ex eo supposito, assumptis aliis cognitis, inferatur conclusio, et ex his aliæ conclusiones, donec veniatur ad principia, aut ad vera aliunde cognita, quot sufficiunt ad suppositi demonstrationem; vel donec veniatur, si ita contingat, ad absurdum aliquod. Nam si ducaris ad vera quot sufficiunt ad demonstrationem, ex illis veris conversis suppositum demonstrabitur: sin incidas in absurdum, falsum esse scis.

Hac usus est methodo primus (quantum scio) Diophantus, paucis adhibitis notis (præter literas) symbolis radicum, quadratorum, cuborum. Nunc autem tota algebra, aucta symbolis ab Oughtredo et Cartesio, et ab his ad geometriam applicata, nomen obtinuit *geometriæ symbolicæ:* infecitque hujus ævi geometras, geometriæ veræ pestis.

Dixi de principiis. Videamus nunc, an non sit etiam aliqua Euclidis vel Clavii demonstratio cujus forma sit illegitima.

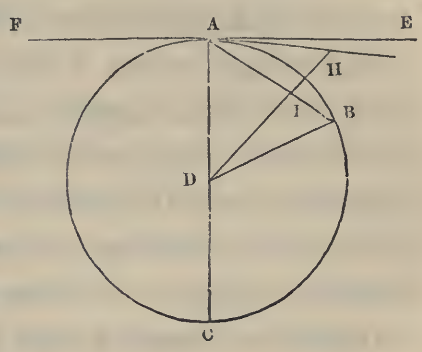
CAP. XIX.

PROPOSITIO DECIMA SEXTA ELEMENTI TERTII EXAMINATA.

Quæ *ab extremitate diametri cujusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet: et in locum inter ipsam rectam lineam et peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: et semicirculi quidem angulus quovis angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.*

CAP. XIX. Propositio decima sexta Elem. iii, etc.

In circulo ABC, *cujus centrum* D, *diameter sit* AC, *ad quam ex* A, *puncto extremo, perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessario extra circulum cadere. Si enim cadet intra ipsum, qualis est* AB*: ducta* DB, *erunt duo anguli* DAB, DBA *æquales; sed* DAB *rectus est per constructionem: igitur et* DBA *rectus erit, quod est absurdum. Duo enim anguli in triangulo minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neque eandem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est* EF. *Dico jam ex* A, *inter* AE, *rectam, et circumferentiam* AB, *non posse cadere alteram rectam.*



Hæc est demonstrationis Euclidis (interprete Clavio) pars prima: quam dico vitiosam esse. Primo, quod punctum A dicit esse neque intra circulum neque in circumferentia ejus. Cum enim

CAP. XIX.

Propositio decima sexta Elem. iii, etc.

punctum A sit terminus semidiametri DA, a qua describitur circumferentia ABC, necesse est ut punctum A sit in ipsa circumferentia. Intulit ergo hanc conclusionem contra ipsam Euclidis constructionem, qui supponit perpendicularem FE duci ab extremo puncto diametri. At concesso punctum A non esse in circumferentia, sed perpendicularem FE solummodo radere sive tangere circulum in A: erit tamen punctum A extra circulum et ab eo separabile, more contiguorum. Itaque ducta per terminum diametri recta quadam parellela ipsi tangenti FE, illa cadet inter rectam AE et arcum AB, contra demonstrationem hujus partis primæ. Perpendicularis enim ducta per terminum diametri non erit ipsa tangens AE, sed ipsi parellela, nec secabit circulum, sed habebit punctum cum circulo commune, nempe ipsius diametri terminum.

Deinde quoniam utriusque semicirculi sunt duo termini, erunt in duobus semicirculis contiguis, ad terminum diametri, duo puncta. Nihil ergo prohibet, quicquid sit punctum, quin duobus terminis pro uno sumptis, diameter una cum minutissima parte arcus (cum plusquam punctum illud geometrarum, nihil commune sit rectæ perpendiculari et arcui) haberi possint pro lineis quæ faciunt angulum rectum. Nam crura angulorum de anguli essentia omnino non sunt: et sic falsum quoque erit quod in tertia parte demonstrationis ponit, angulum quem facit perpendicularis cum arcu, quovis angulo acuto rectilineo esse minorem.

Porro in secunda et tertia parte demonstrationis sic dicit: *Quoniam ostensum est omnem rectam ex* A, *ductam infra perpendicularem* AE, *cadere intra circulum, faciet necessario ea linea cum* AC,

Propositio decima sexta Elem. iii, etc.

angulum rectilineum acutum minorem angulo semicirculi; at vero cum AE, *angulum rectilineum acutum majorem angulo contingentiæ: cum ille sit pars anguli semicirculi, hic vero totum quidpiam respectu anguli contingentiæ. Id quod liquido constat, ducta recta* AB, *quomodocunque infra* AE. *Nam cum hæc linea* AB *intra circulum cadat, ut demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus* CAB *minor angulo semicirculi contento sub diametro* AC *et circumferentia* ABC, *cum ille hujus sit pars. Angulus vero contingentiæ, contentus sub tangente linea* AE *et circumferentia* ABC, *minor angulo rectilineo acuto* BAE, *quod ille hujus pars sit.*

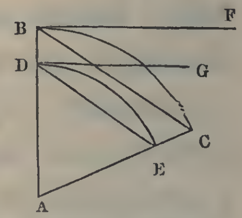
Assumit hic Euclides angulum rectilineum CAB partem esse anguli semicirculi, id est, anguli facti a recta CA et circumferentia AB: item angulum contingentiæ partem esse anguli rectilinei EAB. Sed ex eo manifeste sequitur, quatuor angulos, nempe, rectilineum CAB, angulum semicirculi, angulum contingentiæ, et angulum rectum rectilineum, esse ejusdem generis, sicut partes et totum. Et per consequens angulum contingentiæ (per Def. 5, Elem. v) multiplicatum, posse superare angulum rectum rectilineum. Manifestum enim est partem multiplicari posse, donec suum totum superet. Contradicit ergo Euclides huic definitioni suæ quintæ Elementi quinti. Cum ergo angulus contactus et angulus rectilineus sint diversi generis quantitatis, ita ut altera alteram multiplicata superare non possit, (ut ipse Clavius demonstrat): angulus contingentiæ ablatus nihil auferet ab angulo recto rectilineo, non magis quam linea ablata aliquid aufert a quadrato aut superficies a solido.

CAP. XIX.

Propositio decima sexta Elem. iii, etc.

Itaque angulus semicirculi angulo recto rectilineo est æqualis.

Itaque manifestum est angulum contingentiæ, etsi quantitas sit, non tamen esse quantitatem anguli, sed quantitatem diversi generis, nempe curvedinis: ut supra ostensum est. Erravit ergo hoc loco Euclides, deceptus a sui ipsius definitione puncti. In controversia autem inter Clavium et Pelletarium de angulo contactus, veritas erat a parte Pelletarii: qui sustinuit angulum contactus quantitatem non esse illius anguli, et angulos semicirculorum rectos esse omnes, et inter se æquales.



Quod autem anguli semicirculorum sunt inter se æquales, ex eo quoque intelligere potes quod supra demonstravi; similium arcuum æquales esse curvedines. Itaque descriptis duobus sectoribus similibus, ABC, ADE; ductisque tangentibus BF, DG, et subtensis BC, DE: æqualiter declinabunt arcus BC, DE a tangentibus FB, DG, propter æqualitatem curvedinis sive flexionis primæ a punctis B et D. Æquales ergo utrobique sunt anguli contingentiæ, et, per consequens, etiam anguli semicirculorum.

Judicabis item de doctrina hac Clavii ex fœtu. Nam monstra inde nata sunt. Primum hoc ipsum: *Angulos semicirculorum esse inæquales:* contrarium enim lumine naturali satis manifestum est. Secundum hoc: *Transitur a minore ad majus, et per omnia media, nec tamen per æquale:* id quod nemo cogitans non videret esse falsum. Sed ita est, ut nemo fere hodie philosophetur suo, sed magistri alicujus ingenio: ideoque in absurda incidunt, non aliter quam totidem oves principem gregis sequentur, etsi in mare se præcipitaret.

CAP. XX.

DE DIMENSIONE CIRCULI.

CAP. XX. De dimensione circuli.

PRINCIPIA ista quæ supra a me reprehensa sunt, mirum est etiam quantum ad pulcherrima geometriæ problemata invenienda viam obstruxerunt: quorum exempla aliqua hic tibi exhibere, operæ pretium esse puto.

Sit quadratum ABCD. Centro A, intervallo AB, descriptus sit circuli quadrans ABD. Secentur latera AD, BC bifariam in E et F. Ducta EF secante arcum BD in G, erit arcus BG totius arcus BD pars tertia.

Per punctum G ducatur recta IGK parellela lateri BC, secans AB in I et CD in K, producaturque ad H, ita ut IH sit tripla IG: denique per H ducatur recta NO indefinita, et parallela DC.

Ducatur BG chorda arcus BG, et producatur ad NO in O, secans CD in P. Deinde centro B, intervallo BO, describatur arcus circuli secans BN productam in Q.

Porro lateri BA adjungatur in directum AR æqualis duplæ GF, et ducta RD, quæ æqualis erit duplo lateri AD, producatur ad latus BC productum in S; eritque CS æqualis tangenti 30 graduum; transibit autem RS per H, terminum semiradii KH. Ducatur Q*a* parallela NH, secans RS in *a*. Compleaturque parallelogrammum BQ*ab*. Postremo, diviso arcu BG bifariam in *c*, ductoque sinu arcus B*c*, jungatur R*c*. Hactenus constructio.

Erit ergo sinus arcus B*c* sexta pars rectæ *ba*, et ipsi parallelus; ideoque vel in ipsa *ba*, vel supra, vel infra. Sumatur A*d* sexta pars AD, et ducta

CAP. XX. De dimensione circuli.

R*d*, productaque ut secet *ba*, absecabit sextam ejus partem, propter A*d*, *ba* in triangulo R*ba* parallelas. Quare absecabit in *ba* rectam æqualem sinui arcus B*c*. Quod impossibile est, nisi *ba* transeat per *c*: cum sit ut A*d* ($\frac{1}{6}$AD) ad AD, ita sinus arcus B*c* ad sextuplum sinum arcus B*c*. Transit ergo *ba* per *c*.

Eodem modo, si arcus B*c* secetur bifariam, fient arcus duodecem, et sinus eorundem totidem: qui sinus semper erunt, simul sumpti, minores arcu BD, majores tamen recta *ba*. Eadem methodo, bisecando in perpetuum, ostendi potest, rectam omnem ductam infra BS ipsique parallelam, terminatam in rectis AB, DS, minorem esse arcu BD: et, per consequens, rectam BS, compositam ex radio et tangente 30 graduum, non esse arcu BD majorem. Minor autem esse non potest: cum locus nullus ulteriori bisectioni relictus sit. Etiam geometræ omnes qui magnitudinem circuli determinarunt, arcum BD faciunt minorem quam est recta BS. Habes ergo demonstrationem quadraturæ circuli verbis haud multo pluribus quam quæ sunt in constructione.

Coroll. i. Si jungatur recta RG secans AD in *f*, producta *ba* in *e*, et BS in *i*, erit B*i* tertia pars rectæ BS, et æqualis arcui BG; et *be* æqualis chordæ BG; et A*f* æqualis radio circuli cujus quadrans æqualis est arcui BG; et A*d* radius arcus cujus quadrans circuli æqualis est arcui B*c*: et in universum, omnes rectæ ductæ ab R ad arcum BG, secabunt A*f*, et arcum BG, in ratione radii ad quadrantem a se descriptum. Ex quo sequitur facilis divisio arcus sive anguli in ratione data, ut infra patebit ad cap. xxiii.

Coroll. ii. Juncta AS secante CD in L, erit DL æqualis semidiametro circuli, cujus perimetri quartæ parti æqualis est radius AB. Sunt enim SB, AB, DL, propter similitudinem triangulorum SBA, ADL, continue proportionales. Est autem SB ad AB, ut quadrans perimetri ad radium. Quare et AB ad DL est ut quadrans perimetri ad radium, nempe DL. CAP. XX. De dimensione circuli.

Coroll. iii. Sumpta in AD parte AM æquali rectæ DL, ductaque RM, et producta ad BS incidet in C. Cum enim AD sit radius circuli cujus perimetri pars quarta est æqualis BS, et AM radius circuli cujus perimetri pars quarta est æqualis AB, et rectæ omnes ductæ a puncto R secant BS, AD in ratione quartæ partis perimetri ad radium, recta RM producta incidet in C.

CAP. XXI.

DE MAGNITUDINE CIRCULI HUGENIANA.

Determinationem hanc magnitudinis arcus BD tanta diligentia a geometris omnis ævi summis quæsitam, quamque veram esse tam manifeste modo demonstravi, quam manifeste ulla apud Euclidem propositio demonstrata est, professores mathematici, primo nostrates simul atque apparuit, magno conatu irati oppugnaverunt, consentientibus etiam et laudantibus cæteris. Sed quibus armis, quibus innisi principiis? Illis quæ supra ostendi esse absurda: nempe, *Si linea multiplicetur per numerum, factum esse numerum quadratorum:— Si a numero quadratorum extrahatur radix qua-*

CAP. XXI.

De magnitudine circuli Hugeniana.

drata, extractum esse numerum linearum:—Si ex numero cuborum extrahatur radix cubica, extractum numerum esse linearum:—Punctum esse nihil, et lineam duci posse quæ nullam habeat latitudinem.

Qui propositionem hanc primus exhibuit, demonstravit illam juxta methodum Corollarii proxime præcedentis, hoc modo: diviso arcu BG bifariam in *c*, duxit sinum arcus *bc*, quem sinum duplicavit producens ad *e*. Deinde ductam IG, sinum arcus BG, bifariam secuit in *g*; junctasque *cg*, *e*G, productas supposuit ad latus BA productum. Et bisecando rursus arcum B*c*, ductoque sinu ejus, et diviso I*g* bifariam, atque eodem modo bisecando quamdiu quantitas bisecari potest, concludebat partes arcus BG partibus sinus IG ubique esse proportionales. Id quod et verum est, et ab illo vere illatum. Sequitur autem inde, recta G*e* producta ad BS in *i*, rectam B*i* æqualem esse arcui BG; et proinde totam rectam BS æqualem esse arcui toti BD.

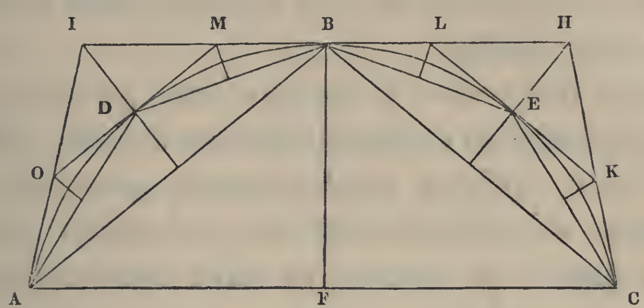
Hoc autem a dictis professoribus impugnatum est, partim ex tabulis sinuum, tangentium, et secantium, partim ab authoritate Archimedis. Quoniam autem tabulæ illæ constructæ sunt per multiplicationem lineæ per numerum, cujus productum falso computant pro numero quadratorum; et per extractionem radicum ex illis quadratis, quas radices falso computant pro numero linearum: argumentum sumptum ex illis tabulis vim refutandi nullam habent*. Et quoniam Archimedes ipse dimensionem circuli suam demonstrat per radicum

* Sic Edit. 1668.

extractionem, authoritas ejus in hac re valere non debet. Neque mirum est, si per hujusmodi calculum, recta *e*G producta cadere videatur in rectam BA productam, ultra vel citra punctum R.

CAP. XXI.
De magnitudine circuli Hugeniana.

Eandem hanc determinationem magnitudinis arcus BD impugnavit Christianus Hugenius, ex eo quod ipse, in libro suo quem ediderat *de Magnitudine Circuli*, demonstravit ut putat rectam compositam ex radio et tangente 30 graduum, qualis est BS, majorem esse arcu quadrantis BD.



Descripto enim segmento circuli semicirculo minore ABC, et diviso a perpendiculari FB bifariam in B; sectisque rursus arcubus AB, BC bifariam in D et E; ductisque eorum chordis CE, EB, BD, et DA; et tangentibus CH, BH, BI, IA, et CK, KE, EL, LB, BM, MD, DO, OA; et deinceps bisecando quantum intelligi potest, demonstrat (et quidem quantum ego video, recte) segmenta CEC, EBE, BDB, DAD minora esse triangulis CKE, ELB, BMD, DOA. Quod autem idem infert, si perpetua bisectione fierent infinita numero segmenta, illa quoque simul sumpta minora fore omnibus triangulis, quæ segmentis respondent simul sumptis, male infertur, nisi recta IBH sit extra circulum, ita ut punctum B non sit ambarum linearum rectæ et curvæ commune, sed inter utramque. Nam si B sit utriusque

CAP. XXI.

De magnitudine circuli Hugeniana.

lineæ commune, omnes illæ tangentes numero infinitæ constituent ipsum arcum ABC. At si B sit extra circulum, quamvis ipsi contiguum, chordæ AB, BC secabunt circulum non in eodem puncto in quo secatur a recta FB, sed utrobique citra ipsum. Docet enim Euclides (prop. 2. Elem. iii) rectam CB totam esse intra circulum, et (prop. 16. El. iii) tangentem esse totam extra circulum. Itaque nulla recta præter FB transire potest per arcum et tangentem ad idem punctum B, nempe ad punctum quod vocant *contactus*, nisi utrique lineæ attribuatur latitudo aliqua.

Itaque falso usus principio hoc, *punctum esse nihil*, post multas demonstrationes intulit, *differentiam inter tertiam partem arcus quadrantis et chordam, ad differentiam inter chordam ejusdem tertiæ partis et sinum ejus* (sive semiradium circuli) *majorem habere rationem quam* 4 *ad* 3: quod non parum confirmat id quod refutare voluit. Quod autem intulit rectam compositam a radio et tangente 30 graduum majorem esse arcu quadrantis, deceptus fecit, eo quod putaret radium circuli non minorem esse quam quæ ab eodem centro ad tangentem ducitur, quæ est extra circulum. Consule ipsum illius librum, cujus mihi exemplar, dum hæc scribo, deest: nec, si adesset, demonstrationes ejus commode hic transcriberentur.

CAP. XXII.

DE SECTIONE ANGULI.

Revertere ad diagramma Capitis xx.

In illo diagrammate, sit datus arcus trifariam secandus B*a*.

CAP. XXII. De sectione anguli.

A puncto R ducatur recta Rα, secans AD in β, et BC in γ. Secetur Bγ trifariam in δ et ϵ: ducanturque rectæ Rδ, et Rϵ secantes arcum Bα in η et ζ, et Aβ in θ et λ.

Dico arcum Bα divisum esse trifariam a duabus rectis Rη, Rζ.

Nam propter parallelas Bγ, Aβ, divisa est etiam Aβ trifariam in η et λ ab iisdem rectis Rδ, Rϵ. Est autem Aβ ad totam AD ut arcus quadrantis descripti intervallo Aβ, ad arcum totum BD descriptum intervallo AD.

Etiam arcus quadrantis descripti a tertia parte arcus Aβ erit tertia pars Bα.

Arcus quadrantis descripti ab Aθ sit $\theta\mu$; arcus autem quadrantis descripti ab Aβ sit $\beta\nu$.

Non differunt ergo arcus duo $\beta\nu$ et Bα inter se longitudine, sed curvedine tantum, cum sit Bα minus, $\beta\gamma$ magis curva. Idem dicendum est de arcu $\theta\mu$, et cæteris omnibus arcubus descriptis super $\theta\lambda$, $\lambda\beta$, et cæteris arcubus qui adhuc describerentur super harum æqualibus partibus, comparatis cum partibus similibus circumferentiæ Bα.

Intellige jam puncta α et β admota esse in lineis AB et $\beta\alpha$ ad β et α, et proinde arcum $\beta\nu$ jacere in Bα. Congrueret ergo cum arcu ipso Bα, si modo omnia puncta θ, λ, et omnes partes harum æquales, ferrentur simul in suis quæque lineis ductis ab R donec pervenirent ad arcum Bα. Necesse enim esset, si Aβ et Bα divisa essent in partes æquales in quot possibile est eas dividi, ut singulæ abscinderent partem arcus Bα æqualem quadranti super se descripto. Quare etiam recta Rθ abscindit ab arcu Bα tertiam partem arcus Bα, nempe Bη; et Rλ, duas tertias ejusdem.

CAP. XXII.

De sectione anguli.

Est ergo arcus Bα datus divisus trifariam a rectis Rδ, Rε. Eodem modo potest arcus non major quam arcus BG, dividi quinquifariam vel in ratione quacunque data. Sicut etiam arcus major quam BG, si bisecetur donec pars ejus minor sit quam BG: nempe partem inventam duplicando toties quoties datus bisectus fuerat.

Angulum ergo in ratione data divisimus: et propterea, etiam proportionem datam dividere docuimus in partes æquales quotcunque requirentur. Idque methodo brevi et perspicua.

CAP. XXIII.

DE QUANTITATE RECTÆ COMPOSITÆ EX RADIO CIRCULI ET TANGENTE 30 GRADUUM. ITEM, DUBITATIO SUPER PROP. 47. ELEM. I, ETC.

Quadratum rectæ compositæ ex radio circuli et tangente arcus 30 graduum, est ad quadratum a radio, ut decem ad quatuor.

Sit radius circuli AB, cujus quadratum sit ABCD. Ducatur arcus BD, qui est quadrans circuli descripti ab AB.

Secetur quadratum ABCD in quatuor quadrata æqualia a rectis EF, GH, secantibus se mutuo in I. Secet autem GH arcum BD in K: jungaturque recta AK, producaturque ad BC in L: erit BL tangens 30 graduum.

Rectæ BL adjiciatur in directum LM, æqualis BC. Erit ergo tota BM composita ex BC radio circuli, et CM tangente 30 graduum.

CAP. XXIII.

De quantitate rectæ compositæ ex radio circuli, etc.

In CM sumatur CN, æqualis semiradio BG. Producatur AD ad γ, ita ut Aγ sit æqualis BN: jungaturque Nγ, quam secet EF producta in P: jungaturque BP, secans GH in V.

Est ergo (per prop. 47. Elem. i) quadratum a BP decuplum quadrati ab NP. Est autem quadratum a radio AB quadruplum quadrati ab NP: et propterea, quadratum a BP est ad quadratum ab AB ut 10 ad 4. Probandum ergo est rectas BP, BM esse æquales.

Ducatur MQ parallela NP, secans BP productam in Q, et EP productam in R. Erit ergo NMRP rectangulum. Ducatur a puncto M ad BP perpendicularis MO; quæ producta incidat in EP ad S.

Sunt ergo triangula BNP, BOM similia. Nam anguli ad N et O sunt recti æquales, et angulus ad B communis. Quare etiam anguli BMO, BPN sunt æquales.

Si jam rectæ MS, MQ sunt æquales, manifestum est æquales quoque esse inter se tum RS, OQ, tum etiam MO, MR, et præterea BO, BN: et per consequens, quadratum a BM ad quadratum a BC ut 10 ad 4. Quod est propositum.

Sumatur in BM pars ipsius tertia Ba, quod fiet sumendo Ga tertiam partem rectæ GL. Radio autem Ba describatur arcus circuli secans rectam GV alicubi, et quidem (sensu judice) in ipso puncto V.

Rursus duplicato* Ba, ut fiat Bβ duæ tertiæ rectæ BM: et radio Bβ describatur arcus circuli secans CD in γ: iterum (sensu judice) punctum γ erit in intersectione rectarum BP, CD. Postremo radio toto BM descriptus arcus circuli, transibit

---

* Sic edit. 1668.

CAP. XXIII.

De quantitate rectæ compositæ ex radio circuli, etc.

per punctum P. Unde judicio sensuum, tertia pars rectæ BP æqualis erit tertiæ parti rectæ BM: et proinde tota BP æqualis toti BM.

"Sed hæc," inquies, "non sensuum sed rationis judicio determinanda sunt." Recte dicis: itaque ne videar severitatem disciplinarum corrumpere velle, conabimur rem demonstrare.

In duobus triangulis similibus, si latus unum primi majus vel minus fuerit quam latus homologum secundi, etiam reliqua duo latera ejusdem primi majora vel minora erunt reliquis homologis secundi utrumque utroque. Id quod per se satis manifestum est.

Quoniam est in triangulis similibus BQM, BMO, ut BQ ad BM, ita BM ad BO, erunt BQ, id est B*e*, BM, BO continue proportionales: et ratio B*e* ad BO duplicata rationis B*e* ad BM, vel BM ad BO. Sed ut B*e* ad BM, ita est BP ad BN. Quare ratio B*e* ad BO duplicata est rationis BP ad BN. A puncto P erigatur ad B*e* perpendicularis, secans BM productam ubicunque: quæ incidet vel in *e*, vel citra, vel ultra, et abscindet a producta BM majorem, vel minorem, quam est ipsa B*e*. Si incidat in ipsum punctum *e*, erunt rectæ B*e*, BP, BN, continue proportionales. Sin incidat citra vel ultra *e*, erit ratio cujusdam rectæ majoris vel minoris quam B*e* ad BP, duplicata rationis BP ad BN, sive BM ad BO. Quod est absurdum, cum B*e*, BM, BO, sint continue proportionales. Sunt ergo B*e*, BP, BN continue proportionales. Sed ut BQ ad BP, ita est B*e* ad BM. Sunt autem BQ, B*e* æquales. Quare etiam BP, BM sunt æquales. Radius ergo circuli una cum tangente 30 graduum, æqualis est rectæ quæ subtendit angulum rectum

in triangulo rectangulo, cujus latus unum æquale est tribus semiradiis, alterum uni semiradio. Quod erat demonstrandum.

CAP. XXIII. De quantitate rectæ compositæ ex radio circuli, etc.

Sunt ergo MS, MQ æquales.

Est autem MQ æqualis tertiæ parti BM. Est autem MS (propter triangula BGV, MRS æqualia et similia) æqualis BV, tertiæ parti BP. Itaque BM, BP sunt æquales: et quadratum a BM ad quadratum a BC ut 10 ad 4. Quod erat demonstrandum. Nec in veritate theorematis sensus et ratio dissentiunt.

Corollarium hinc oritur manifestum, rectas BN, BO, ut et OP, PR, item PS, PQ, esse inter se æquales; et esse BQ, BP, BO, id est B*e*, (facta æquali BQ), BM, BN continue proportionales: et NO, MP esse parallelas; et angulos NOP, OMP, NPM, PMR esse omnes inter se æquales; et denique, facto angulo NM*n* æquali angulo OPS, parallelas esse BP, MN æque altas.

Ex proportione hac modo demonstrata sequitur theorema novum circa dimensionem circuli, nempe hoc: Arcum quadrantis descripti semidiametro BM, æqualem esse quinque semiradiis; arcum autem quadrantis cujusdam, qui sit æqualis rectæ AB, descriptum esse a semidiametro quæ est media proportionalis inter AB, sive CD, et ejusdem duas quintas.

Secetur enim AD, quæ æqualis est radio, in quinque partes æquales, quibus adjiciuntur* in directum aliæ duæ quintæ, D*a*, *ab*. Divisa autem A*b* bifariam in *c*, describatur semicirculus secans CD in *d*. Est ergo ut $\frac{2}{5}$ radii AD ad D*d*, ita D*d* ad radium

* Sic edit. 1668. Edit. 1666, "adjici*a*ntur".

CAP. XXIII.

De quantitate rectæ compositæ ex radio circuli, etc.

AB. Sed ut $\frac{2}{5}$ radii AB ad mediam B*d*, ita sunt duo semiradii, id est AB, ad mediam inter AB et quinque semiradios. Est autem BM, ut modo demonstratum est, media inter AB et quinque semiradios. Sunt ergo D*b*, D*d*, DC, BM, et quintuplus semiradius, continue proportionales. Ducta ergo A*d*, et producta, incidet in M: propterea quod est ut MB ad BA, ita BA, id est AD, ad D*d*. Quoniam ergo demonstratum est, cap. xx, et defensum cap. xxi, contra Hugenium, qui problema hoc profundissime contemplatus, et ex principiis Euclidis accuratissime ratiocinatus est, rectam BM æqualem esse arcui BD, eandemque modo ostendi æqualem esse mediæ inter AB et quinque semisses ejusdem AB, sequitur, propterea quod AB est radius quadrantis æqualis rectæ BM, rectam D*d* esse radium quadrantis æqualis AB; et duas quintas radii AB, nempe D*b*, esse radium quadrantis D*d*; et denique, rectam BM esse radium quadrantis æqualis quintuplæ CN, id est quintuplo semiradio. Unde exsurgit etiam, rectam D*d* æqualem esse duabus quintis arcus BD. Quæ omnia vidit quidem, et edidit Josephus Scaliger: sed cum non recte demonstrasset, damnavit ipse, nil dubitans de principiis Euclidis: sed postquam fuisset convitiis Clavii acerbissimis oneratus.

Consideremus nunc eadem hæc in numeris. Ad BM adjiciatur M*e* æqualis PQ; eritque N*e* æqualis OQ, id est GV, id est tertiæ parti semiradii BG; semissis autem rectæ N*e*, qui sit N*r*, erit sexta pars ejusdem BG.

Erit ergo quadratum a BG æquale 36 quadratis ad N*r*. Est autem recta BN octodecupla ipsius N*r*, et proinde quadratum ejus æquale 324 qua-

dratis ab eadem N*r*. Est autem B*e* vigecupla ejusdem N*r*, et proinde quadratum ejus æquale 400 quadratis ab eadem N*r*.

CAP. XXIII.

De quantitate rectæ compositæ ex radio circuli, etc.

Est autem B*r* æqualis novemdecem rectis N*r*; et quadratum ejus æquale 361 quadratis ab eadem N*r*. Majus ergo est quadratum rectæ B*r*, quam quadratum rectæ BP sive BM. Quadratum enim a BP æquale est tantummodo 360 quadratis ab N*r*.

Inter quadrata a B*e* et BM, id est inter 400 et 324, sumatur numerus medius proportionalis: cadit enim inter quoslibet duos numeros quadratos unus medius proportionalis: eritque ille numerus medius 360, nempe tot quadrata a sexta parte BG, quot sunt æqualia decem quadratis a semiradio toto BG. Itaque si gnomon circumponi intelligatur quadrato a BM, cujus gnomonis latitudo sit M*r*, gnomon ille æqualis erit quadrato ab N*r* sexta parte semiradii. Hactenus nulla causa est dubitandi de prop. 47, Elem. i.

Rursus, quadratum a CN æquale est 36 quadratis ab N*r*. Est autem C*e* octupla ipsius N*r*, et quadratum ejus æquale 64 quadratis ab eadem N*r*. Et quia C*r* septupla est ipsius N*r*, quadratum ejus æquale erit 49 quadratis ab eadem N*r*.

Jam cum CM tangens sit 30 graduum, erit quadratum ejus (secundum prop. 47, Elem. i) æquale 48 quadratis ab N*r*. Est enim AL, secans 30 graduum, dupla tangentis BL, sive CM; et AB radius duplus semiradii BG. Cum ergo quadratum ab AL sit ad quadratum a BL ut 4 ad 1, erit ad quadratum ab AB ut 4 ad 3. Quare etiam quadratum tangentis BL erit ad quadratum semiradii BG ut 4 ad 3, sive 48 ad 36. Sed quia quadratum a BG sive CN est 36, erit quadratum a BL sive CM,

CAP. XXIII.

De quantitate rectæ compositæ ex radio circuli, etc.

secundum Euclidem, æquale 48 quadratis ab Nr. Est autem quadratum a Cr 49. Quare si gnomon cujus latitudo sit Mr, circumponeretur quadrato a CM, esset ille gnomon æqualis quadrato ipsius Nr. Sed ostensum est, quod gnomon cujus latitudo sit Mr, circumpositus quadrato a BM, æqualis est quadrato ab eadem Nr. Non est ergo quadratum a tangente 30 graduum ad quadratum a semiradio ut 4 ad 3. Quod est contra prop. 47, Elem. i. Non videtur ergo propositio illa universaliter vera: sed dubitans nil pronuntio.

"Error est," inquies, "aliquis vel in illa, vel in hac demonstratione." Certissime. Incumbe igitur toto animo utriusque examinationi: nec ratiocinationes tantum, sed etiam principia excute. Imprimis autem, cave ne tenuissima triangula vel sectores quantuloscunque computes pro lineis rectis, aut parallelogramma obliquangula exigua pro rectangulis. Id quod evitare non potest is, qui rectangulum non quadratum sectum putet a linea per angulos oppositos bifariam; ut est in propositione 34, Elem. i. Quanquam enim in quadrato diagonalis considerari potest ut mera longitudo, atque etiam ut minutissimum rectangulum, quia dividit oppositos angulos bifariam: in oblongo tamen, ubi diagonalis non dividit oppositos angulos bifariam, considerari non potest neque ut rectangulum, neque ut mera longitudo, sed ut vel triangulum obliquangulum, vel parallelogrammum obliquangulum. Sed ut hanc difficultatem facilius examinare possis, ostendam tibi nunc quanto, juxta Euclidem, quadratum a tangente 30 graduum majus est quam quadratum a semiradio.

Dico autem quadratum a tangente 30 graduum,

nimirum quadratum a CM, æquale esse quadrato a CN una cum tertia ipsius parte, et duobus quadratis ab NM, sive PR, tangentis et semiradii differentia, si vera sit prop. 47, Elem. i.

CAP. XXIII.
De quantitate rectæ compositæ ex radio circuli, etc.

Super CM constituatur quadratum CMYX. Item super BM constituatur quadratum BMZ*f*. Etiam super BN constituatur quadratum BN*gh*. Erit ergo tum PY, tum *g*Z quadratum differentiæ inter CM, tangentem 30 graduum, et semiradium CN.

Constat autem quadratum N*h* æquale est* novem quadratis a semiradio CN. Quod autem quadratum B*f* æquale est decem quadratis a CN, supra demonstratum est.

Est ergo gnomon qui quadrato N*h* appositus est, æqualis quadrato NF. Differentia autem inter quadratum MX et NF, est gnomon constans ex duplo rectangulo MP et quadrato PY, cui æquale est quadratum *g*Z.

Gnomon autem qui adjectus est quadrato N*h*, æqualis est sextuplo rectangulo MP una cum quadrato *g*Z. Est autem gnomon ille æqualis quadrato semiradii. Minus ergo est quadratum semiradii quam quadratum tangentis 30 graduum tertia sui, et præterea tanto quantum est duplum quadratum a PY vel *g*Z.

Excessus ergo quadrati tangentis 30 graduum supra quadratum semiradii, majus est quam tertia pars quadrati semiradii, tanto quantum est duplum quadratum PY. Quod est contra prop. 47, Elem. i.

Error autem hic in quadratis ipsis, ut vides, satis est sensibilis, etsi in lateribus non tam facile apparet. Apparebit autem, si ad $\frac{4}{6}$ rectæ BG addideris in directum radium totum, sive $\frac{12}{6}$, atque inter illas

* Sic edit. 1666 et 1668.

CAP. XXIII.

De quantitate rectæ compositæ ex radio circuli, etc.

mediam inveneris proportionalem. Nam erit illa quidem non valde diversa a tangente: sed tamen, si cum diligentia operabere, media illa minor erit quam tangens 30 graduum, nimirum quam BL: est tamen illa media, latus verum quadrati æqualis 48 quadratis a sexta parte BG, nimirum ab N*r*.

Verum error ille an magnus an parvus sit, nihil hic refert. Nam etsi nullus esset, cum tamen propositio illa (propter principia quibus innititur, quæ sunt ut supra ostendi dubiæ fidei) etiam ipsa dubia est.* Itaque temere dictum est a Clavio, ad prop. 16, Elem. iii, contra Pelletarium, "Geometricas", id est geometrarum, "demonstrationes ejusmodi esse, ut consensum extorqueant ac dubitationem omnem excludant, nulloque modo quempiam sinant ancipiti opinione distrahi, sic ut tum assentiatur si velit, tum si nolit dissentiat."

Si circulus vel triangulum sectum fuerit in quatuor partes, quæ partes dispersæ essent, una ad Indos Orientales, altera ad Indos Occidentales, tertia ad Polum Arcticum, quarta ad Antarcticum: putasne esse demonstrationem geometricam aliquam, quæ me cogere posset ut credam puncta eorum verticalia non esse quatuor puncta, sed unum idemque punctum? Item si quid moveatur motu æquabili per minus et majus spatium, extorquebitne demonstratio ulla ut credam quod non transeat per æquale, aut ut credam vera esse quæ supra ostendi esse absurda?

Si mea hæc recte demonstrata sunt, animadvertenda tibi præterea sunt, primo, maximam partem propositionum quæ dependent a prop. 47, Elem. iii, (sunt autem multæ) nondum esse demonstratam.

---

* Sic edit. 1666 et 1668.

Secundo, tabulas sinuum, tangentium, et secantium egregie falsas esse; propterea quod calculus eorum dependet a veritate horum duorum assumptorum: 1. Radix numeri quadratorum non est numerus quadratorum, sed linearum. 2. Numerum linearum per numerum (simpliciter) multiplicatum, facere numerum quadratorum. Cum enim quadratum a recta composita ex radio et tangente 30 graduum æquale sit decem quadratis a semiradio: si ponatur semiradius 5000, erunt tres semiradii 15000 pro BN. Quadratum autem a semiradio est 25000000, et quadratum a BN 225000000: quæ duo quadrata simul sumpta sunt 250000000, cui æquale est quadratum a BM composita ex radio et tangente 30 graduum. Radix autem numeri 250000000 est 15811—quarum partium radius est 10000. Relinquitur ergo pro tangente 30 graduum 5811—proxime. Est autem, in tabulis tangentium, pro ejus quantitate positus numerus 5773—, qui est error momenti satis magni in calculis astronomicis, et in calculo triangulorum quo utuntur agrimensores. Iisdem principiis quæ ostendi supra esse falsa, attribuere potes, quod quantitas circuli, a magnis ingeniis omni ævo quæsitum, inveniri tamen non potuerit. Quis enim præjudicium Archimedis non vereretur? Etsi liber ejus *de Dimensione Circuli* non mihi videatur ab ipso editus; continet enim tres tantum propositiones, nec eas ordine quo oportuit dispositas, nec sicut alii ejus libri ad quenquam qui eos consideraret missus, sed ut cui nondum manum ultimam imposuerit apud se retentus, ab aliis geometriæ minus peritis post mortem ejus editus.

CAP. XXIII. De quantitate rectæ compositæ ex radio circuli, etc.

Doctrina autem, et ipsa nomina sinuum, tangen-

CAP. XXIII.

De quantitate rectæ compositæ ex radio circuli, etc.

tium, et secantium calamitas geometriæ nupera est. Qui subtensas et semisubtensas, quæ nunc vocantur dimidiatorum arcuum sinus, calculo primus subjecit, fuit Ptolomæus. Sinum nusquam scriptum invenio ante Regiomontanum: qui vero tabulas sinuum, tangentium, et secantium quibus utimur, primus condidit, fuit Clavius.

Secundo, notatu dignum est, causam quod quadratura circuli, divisio rationis, aliaque pulcherrima, sed difficillima geometriæ problemata tam diu latuerunt, in illis ipsis esse demonstrationibus quas cogentes esse prædicant. Primi omnium Arabes invenerunt quadratum quadrantis perimetri decuplum esse quadrati a semiradio: quod etsi verissimum sit, confutavit per extractionem radicum Johannes Regiomontanus, qui idem esse putavit quadrati latus et numeri quadrati radicem. Audi ipsum Regiomontanum:—"Arabes olim circulum quadrare polliciti, ubi circumferentiæ suæ æqualem rectam descripsissent, hanc pronuntiavere sententiam: *Si circuli diameter fuerit ut unum, circumferentia ejus erit ut radix de decem.* Quæ sententia cum sit erronea, quemadmodum alibi explanavimus, cumque numeros introducat rectilineationem effecturos, numeri ipsi in hoc negotio sunt suspecti." Olim ergo, ut vides, magnitudo circuli cognita fuisset, nisi obstitissent quæ a geometris nunc *cogentia* appellantur. Iterum doctrina hæc Arabum apparuit a Scaligero, atque iterum disparuit expulsa exorcismo convitiorum a Clavio. Sed tertium nunc apparens, docta jam exorcismos et convitia contemnere, nunquam puto abigetur.

Notabis præterea convitiorum causas. Quod Scaligerum Clavius, Orontium et Longomontanum

alii, convitiati sunt, quæ causa esse potuit? Quo læsi fecerunt? Paralogismus meus damnum tuum non est. Unde igitur iræ tantæ? An a zelo boni communis, nimirum ne corrumperetur paulatim mathematica? Utinam quidem illis omnibus cura boni communis tanta esset, ut nihil omnino in libris falsi paterentur esse sine confutatione. Sed ita est homo, nisi præcepta vera philosophiæ moralis ante didicerit, ut famam aut lucrum primario, veritatem secundario appetat. Inde est quod irascantur illis, quorum industria nimia veritatis lux infertur: qua patescat omnibus, quantuli viri sunt qui volunt haberi maximi. Ego aliqua quidem in Euclidi reprehendi, non tamen ut illum non putem magni faciendum esse, qui scientiarum mathematicarum tradendarum methodum primus tradidit. Nihil ab Archimede editum non laudo. Consilium mihi aliud non est, quam arithmeticæ et algebræ in demonstrandis propositionibus pure geometricis abusum tollere, si potuero. Vale.

CAP. XXIII. De quantitate rectæ compositæ ex radio circuli, etc.

APPENDIX.

Cum in fine Capitis xxii ex data anguli omnimoda sectione divisionem etiam rationis omnimodam inveniri præsumpserim, id nunc qui fiat ostensurus sum.

DE MEDIIS PROPORTIONALIBUS IN GENERE.

INTER DUAS RECTAS DATAS INVENIRE MEDIAS PROPORTIONALES QUOTCUNQUE.

Sint primo inveniendæ duæ mediæ inter datas quascunque, AB majorem et AV minorem (fig. i).

Fiat ab AB quadratum ABCD: et in lateribus AB, AD sumantur AE, AF, utraque æqualis AV.

Inter AB et AE inveniatur media A*a*, cui æqualis in latere AD sumatur A*b*: ducaturque *ab*, quam ducta diagonalis AC necessario secabit bifariam et ad angulos rectos in *d*.

Ducatur etiam diagonalis BD, secans AC in N. Itaque AC, BD secabunt se mutuo bifariam et ad angulos rectos in N.

Jungantur D*a*, *b*E, ducaturque EF secans AC in *o*; eruntque AN, A*d*, A*o* continue proportionales, in eadem ratione cum rectis AB, A*a*, AE, sive AD, A*b*, AF; et rectæ BD, *ab*, EF continue proportionales.

Centro N, radio NB, describatur arcus circuli BG, secans D*a* productam in G: item centro *d*, radio *da*, describatur arcus circuli *ag*, secans *b*E productam in *g*, ducaturque *dg*.

Quoniam ergo est ut AD ad A*a*, ita A*a*, id est A*b*, ad AE, erunt D*a*, *b*E parallelæ, et anguli BD*a*,

D*ab*, *ab*E æquales: et per consequens, anguli BNG, *adg* (dupli angulorum BD*a*, *abg*) inter se æquales. APPENDIX.

Secetur arcus BG in tres partes æquales, quarum BH sint duæ: jungaturque DH, secans latus AB in I. Ducta ergo NH, erit angulus BNH duplus anguli BDH, id est, duplus anguli BDI.

Rectæ AI sumatur in latere AD æqualis AK, ducaturque BK.

Quoniam igitur æquales inter se sunt tam AB, AD, quam AI, AK, erunt quoque inter se æquales DI, BK, et secabunt se mutuo in diagonali AC ad P; eruntque tum DP, PB, tum KP, PI æquales; et ducta IK erit parallela rectis BD, *ab*, EF. Quatuor denique anguli BDI, DBK, DIK, BKI erunt æquales, et eorum quilibet æqualis duabus tertiis anguli BD*a*.

Similiter secetur arcus *ag* in tres partes æquales, quarum *gh* sint duæ, et *ha* una; jungaturque *dh* secans AB in M, et ducatur *b*M. Angulus ergo *adh* in centro, qui idem est cum angulo *ad*M, duplus est anguli *abh* in circumferentia.

Rectæ AM sumatur in latere AD æqualis AL. Jungatur *d*L; quæ erit ipsi *d*M æqualis. Ducatur *a*L. Cum autem (propter tum A*a*, A*b*, tum AM, AL æquales) æquales quoque sint *a*L, *b*M, illæ secabunt se mutuo in diagonali AC ad *e*; eruntque anguli *ba*L, *ab*M æquales.

Ducatur ML; quæ (propter AL, AM æquales) erit rectæ *ab* parallela. Quia autem *b*M, *a*L secant se mutuo in *e*, erunt quatuor anguli *ab*M, *ba*L, *b*ML, *a*LM æquales; et totus angulus *d*ML, sive ipsi æqualis *d*LM, æqualis tertiæ parti anguli *adg*, id est, æqualis duabus tertiis anguli *ab*E, sive anguli BD*a*, id est, æqualis angulo BKI vel DIK; et quia

APPENDIX. rectæ ab, ML sunt parallelæ, erit etiam angulus adM æqualis eidem angulo DIK sive BKI.

Producatur Ld utcunque ad f. Erit ergo angulus fdM externus æqualis ambobus simul angulis internis dLM, dML. Angulus ergo fdM duplus est anguli adM, dividiturque angulus fdM a recta da bifariam. Ducatur Pm dividens angulum BPI bifariam, et secans AB in m. Cum igitur angulus BPI duplus sit anguli PKI, erit angulus mPI æqualis angulo fda, et angulus mPd rectus; et rectæ Pm, da parallelæ, et proinde anguli IPd, fdP æquales. Quoniam igitur IK secat Pd ad angulos rectos, producta Lf incidet in I. Similiter ostendi potest rectam Md productam transire per K.

Est ergo quadrilaterum IPKdI rhombus.

Jungantur MF et LE; quæ, quia sunt æquales, secabunt se mutuo in diagonali ad n. Et parallelæ sunt tum Da, bE, tum DB, ML; tum etiam IK, EF: erit ergo angulus bEL æqualis angulo IDa; et anguli LEF, LMF æquales duobus angulis BDI, DBK, id est duobus angulis ILM, KML, uterque utrique.

Est ergo quadrilaterum MdLnM rhombus.

Sunt ergo PB, dI, nM, nE continue proportionales.

Sed ut PB ad PI, id est ad PK, ita est AB ad AK, id est ad AI: propterea quod recta AP dividit angulum BAK bifariam. Item ut dI ad nM, id est ad dL, ita est AI ad AL, sive ad AM: quia Ad dividit angulum IAL bifariam. Item ut nM ad nE, id est ad Fn, ita est AM ad AF, sive AE: quia An dividit angulum MAF bifariam.

Sunt ergo rectæ AB, AI, AM, AE continue proportionales: et AI, AM, sive AK, AL, mediæ quæsitæ.

Rursus inter datas quascunque AB, AV, inveniendæ sint quatuor mediæ. Fiat ab AB (fig. ii) quadratum ABCD: sumanturque in lateribus AB, AD partes AE, AF utraque æqualis minori AV. Sumatur autem inter AB, AE media A*a*, cui in latere AD sumatur æqualis A*b*; junganturque D*a*, et *b*E; ducanturque DB, *ab*, *b*E, EF. Ducatur etiam diagonalis AC secans DB, *ab*, EF, in N, *d*, *o*. Deinde centro N, radio NB describatur arcus circuli, secans D*a* productam in G. Secetur autem arcus BG in quinque partes æquales, quarum BH sint duæ, et BQ quatuor.

Item centro *d*, radio *da*, describatur arcus circuli *ag*, secans *b*E productam in *g*: seceturque arcus *ga* in quinque partes æquales, quarum *gh* sint duæ, et *gq* quatuor.

Ducatur DH, secans AB in R: et in latere AD sumatur AS æqualis AR. Ducanturque BS, RS; eruntque DR, BS æquales; et propterea, secabunt se mutuo in diagonali AC ad T; et erunt DB, RS parallelæ; et quatuor anguli NBT, NDT, TRS, TSR æquales, et quilibet eorum æqualis duabus quintis anguli BDG.

A puncto S ducatur SX parallela DR, et a puncto R ducatur RY parallela BS. Erunt ergo SX, RY æquales, et secabunt se mutuo in diagonali ad Z. Itaque quadrilaterum STRZS erit rhombus: junctaque XY erit parallela rectis DB, RS, et *ab*; et utervis angulorum ZXY, ZYX æqualis erit angulo BDR, id est duabus quintis anguli BDG.

Ducatur *dq* secans AB in M. Ducatur etiam *b*M; eritque angulus *ab*M semissis anguli *ad*M. In latere AD sumatur AL æqualis AM; junganturque ML et *a*L. Itaque *b*M, *a*L secabunt se mutuo

APPENDIX. (cum sint æquales) in diagonali AC ad *e*. Quare ambo simul anguli *d*ML, *e*ML, sunt æquales angulo ZXY*.

Et quia *ad*, ML sunt parallelæ, erit angulus *ad*M æqualis angulo *d*ML, id est angulo ZXY. Jungatur L*d*, quæ æqualis est *d*M: et producatur utcunque ad *f*. Erit ergo angulus *fd*M duplus anguli *ad*M, id est, æqualis angulo BTR, sive DTS, sive YZS, sive RZX. Est ergo recta L*f* rectis BS, ZR parallela; et recta *d*M rectis DR, SX parallela. Sunt autem anguli *adf*, ZXY æquales, et tum *ab* tum XY secat AC ad angulos rectos. Sunt ergo anguli *fd*Z, XZ*d* æquales. Quare recta L*f*, quæ transit per *d*, incidet producta in X: et propter eandem rationem producta M*d* incidet in Y. Est ergo quadrilaterum YZX*d*Y rhombus.

A puncto M ducatur recta MI parallela LX, secans AD in I: item a puncto L ducatur recta LK parallela YM secans AD in K. Quæ duæ MI, LK, cum sint æquales, secabunt se mutuo in diagonali AC ad *m*. Quia autem LM secat eandem diagonalem ad angulos rectos, et sunt tum *d*L, *m*M, tum *d*M, *m*L parallelæ, erit quadrilaterum L*d*M*m*L rhombus.

Postremo, jugantur IE, KF: quæ, cum sint æquales, secabunt se mutuo in diagonali ad *n*. Quoniam ergo tum IK, DB, tum EF, SR, tum *b*E, D*a* sunt parallelæ; et tam IE, KF, quam BS, DR secant se mutuo in diagonali AC: erunt anguli *n*IK, *n*KI, *n*EF, *n*FE æquales tum inter se, tum angulis TBN, TDN, TRS, TSR, et recta FK parallela

---

* Sic edit. 1668.

rectis BS, RY, XL, MI, sicut et IE parallela rectis DR, SX, YM, LK.

Est ergo quadrilaterum I*m*K*n*I rhombus. Quare BT, RZ, X*d*, M*m*, K*n* sunt continue proportionales: et propter angulum BAS, RAY, XAL, MAI divisum ab AN bifariam, erunt (per Eucl. vi. 3) rectæ AB, AR, AX, AM, AK, AE, sicut et AD, AS, AY, AL, AI, AF continue proportionales. Itaque inter duas AB, AV datas, inventæ sunt quatuor mediæ, AR, AX, AM, AK, sive AS, AY, AL, AI.

Ad mediarum numerum omnem demonstrationes applicare singulas impossibile est. Manifestum autem est, quod, si arcus BG secetur septifariam, inveniri sex rhombos latera habentes totidem continue proportionalia, et consequenter sex medias; quemadmodum ex trisectione inventæ sunt duæ mediæ, et ex quinquisectione quatuor mediæ; atque ita in infinitum pro mediis numero paribus. Datis autem paribus, omnis mediarum numerus impar facile innotescit per sumptionem inter singulas proportionales singularum mediarum. Invenimus ergo methodum generalem inveniendi inter duas rectas datas medias quotcunque per sectionem anguli. Quomodo autem angulus in ratione data quacunque secandus sit, docuimus supra, Cap. xxii.

Hæc, quanquam certa et demonstrata, corruerent tamen, si verum esset quod algebristæ nostri dicunt, radicem numeri quadrati, et figuræ quadratæ latus idem esse.

Examinabimus jam logicæ, quam illi jactitant, severitatem.

Vitiosam esse aiunt demonstrationem, in quam non ingreditur omne id quod ad constructionem assumitur. Ego contra, demonstrationem in qua

APPENDIX. neque propositionem, neque consequentiam ullam falsam reperio, peccatorum omnium contra logicam absolvendam censeo. Neque illorum regulam illam utcunque speciosam legisse me memini in Aristotele, neque in alio scriptore logico.

Exhibenda mihi igitur est demonstratio legitima, ubi assumptum aliquod ad constructionem, non tamen adhibetur ad demonstrationem. Demonstrabo autem, absque trisectione anguli, inter rectam datam et ipsius semissem quænam sint mediæ duæ proportionales.

Sint datæ (fig. 3.) duæ rectæ AD, DV, facientes unam rectam AV. Sit autem DV semissis ipsius AD; fiatque a majore AD quadratum ABCD. Inter AD et DV inveniatur media proportionalis DE; cui in lateribus BC, AD ponatur æqualis AO et BR; jungaturque RO, et producatur.

Secetur DO bifariam in K: centro autem K, intervallo KV, describatur circulus VIMX, secans CD in X, AD in M, et RO productam in I. Quoniam ergo RO, CD sunt parallelæ, anguli deinceps ad O et D sunt recti; et DK, KO æquales; et proinde etiam OM, DV æquales. Æquales item sunt IK, KX; et IX diameter circuli VIMX, eademque æqualis rectæ MV. Itaque ductis rectis VX, XM, MI, IV, erit VIMX rectangulum: et tres rectæ DM, DX, DV continue proportionales. Divisis autem MX, IV bifariam in Z et L, ducta ZL transibit per K; et secabit tum MX tum IV ad angulos rectos.

In recta IK sumatur IP æqualis DV. Erit ergo reliqua PX æqualis DM, et PK æqualis DK: item LK secabit angulum DKP bifariam.

Producatur CD in G, secans KL in S: ita ut DG, CD sint æquales. APPENDIX.

A puncto P ducatur recta PY perpendicularis rectæ IP, æqualis autem DG: junganturque YI, GV.

Quoniam ergo IP est æqualis DV, et PY æqualis DG, et anguli ad P et D recti, erunt YI, GV æquales: et divisa YI bifariam in H, circulus descriptus radio HI transibit per P et Y.

Producta autem YP transibit per M, eritque PM æqualis DX. Cum enim IP, DV sint æquales, et IM, VX æquales et parallelæ, et in triangulis IPM, XDV anguli ad P et D recti, erunt quoque PM, DX æquales. Similiter quia OM est æqualis DV, et MI, XV æquales et parallelæ, erit OI æqualis eidem DX, et tota YM æqualis toti GX.

Secent autem se mutuo PM et OI in Q. Æquales ergo inter se sunt QI et QM; æquales item anguli QMI, QIM; item anguli OMP, OIP, cum æquales sint tum KP, KO, tum KI, KM, tum etiam OQ, PQ; et angulus PMI æqualis angulo DXV, et angulus PIM æqualis XVD, propter similitudinem triangulorum PMI, DXV, et angulus PQI externus duplus anguli interni PMI vel QIM.

Quoniam autem OQ, DS sunt parallelæ, transibit MY per S. Est enim angulus KSD æqualis angulo DXV, propter KS, XV parallelas; est autem angulus MQI* ejusdem anguli DXV, sive KSD, duplus. Ubicunque ergo MY secat DG, faciet cum illa angulum anguli KSD duplum. Cum enim anguli ad P et D sint recti, et anguli ad K æquales, atque etiam rectæ DK, KP æquales; producta MP donec

---

* Sic edit. 1666 et 1668. Quære, PQI.

APPENDIX. concurrat cum KL, faciet cum illa angulum æqualem angulo KSD: id quod fieri potest in unico puncto rectæ KL, nempe S. Quare recta KL dividit angulum PSD, simulque verticalem ipsius YSG bifariam.

Quia vero æquales inter se sunt tum GD, YP, tum DS, PS, æquales quoque erunt rectæ GS et YS. Ducta ergo GY, secabitur a KL producta bifariam et ad angulos rectos in T.

Cum autem in triangulis TYS, DXV, anguli ad T et D sint recti, et anguli ad S et X æquales: erit angulus TYS æqualis angulo XVD.

Jungantur HS, HP, HD. Quoniam ergo in triangulis HPS, HDS, latera PS, DS sunt æqualia, et latus HS commune, erunt quoque latera HP, HD æqualia; et anguli HPS, PHS æquales angulis HDS, DHS, uterque utrique. Circulus ergo descriptus radio HP, qui transit per I et Y, transibit etiam per D.

Etiam quia rectæ DK, KP, ut et anguli ad K, æquales sunt, transibit HS per K; et proinde secabit IV bifariam et ad angulos rectos in L. Postremo, cum anguli KLV, KLI sint recti, et IL, LV æquales; si intelligatur ducta recta D*a* diagonalis rectanguli DV*a*G, ea secabit diagonalem alteram bifariam in H. Cum enim trianguli æquicruri PHY anguli ad P et Y sunt æquales, et utrivis eorum æqualis sit angulus *a*DG, æquales erunt anguli YPH, *a*DG. Angulus autem LSG æqualis est utrique simul angulo SPH, SHP; sed anguli LSG, LSY sunt æquales; quare recta SL producta faciet cum D*a* angulum angulo SHP æqualem. Recta ergo D*a* (et proinde etiam GV) transit per H.

APPENDIX.

Dividitur ergo recta GV bifariam in H, et circulus descriptus radio HP transit per puncta G, I, P, D, V, Y. Est ergo angulus GYV in semicirculo.

Est igitur tum IGYV, tum GMXY, tum etiam (ut ante ostensum est) IMXV rectangulum.

Itaque triangula rectangula GDM, MDX, XDV similia sunt: et propterea, quatuor rectæ DG, DM, DX, DV continue proportionales: quarum DM, DX sunt mediæ quæsitæ. Item OR, OV, OI, OM continue proportionales: quarum OV, OI sunt mediæ quæsitæ. Item PY, PX, PM, PI continue proportionales: quarum PX, PM sunt mediæ quæsitæ.

Coroll. Quoniam YX, GM sunt parallelæ et æquales, item GM, VR parallelæ et æquales, erunt rectæ VY et XR æquales.

Idem demonstrari potest ex eo ipso, quod recta DE est media proportionalis inter AD et ipsius semissem DV, hoc modo:

Quoniam autem RCEy, γC$h\mu$ sunt quadrata, et Cμ, CE æquales; erunt tres rectæ Cy, yE, Ch, continue proportionales in ratione CE ad Ch, id est, in ratione DC ad DE, vel DE ad DF. Si ergo a puncto C sumatur Cω æqualis Ch, erunt Cy, Cμ, Cω continue proportionales. Quod si ab ω ducatur ad latus DC perpendicularis, erunt in CE tria spatia continue proportionalia quorum minimum est hE. Quoniam autem est ut DC ad DE ita CE ad Ch, erit ratio DC ad DE ad rationem DC ad Dh ut ratio triplicata ad rationem duplicatam. Sed ratio DC ad DX est duplicata rationis DC ad Dh. Nam non modo DF, DE, DC, sed etiam DF, DX, Dh sunt continue proportionales: et proinde ratio DC ad Dh duplicata est rationis DE ad DX. Sunt

APPENDIX. ergo DC, D*h*, DX, DF continue proportionales: et D*h*, DX mediæ quæsitæ.

Si quis in hac demonstratione propositionem falsam aut non necessariam illationem ostenderit, modo convitiis se abstineat, (etsi mihi meus error placere non potest), veritati tamen studens non inique feram. Sed ut eo solum nomine accuser, quod postquam ad constructionem assumpsissem mediam proportionalem inter extremas, medietate illa non sum usus, iniquum est. Dicant velim, illa regula a quo magistro logicæ profecta est, ut cum magistro ipso controversia mihi sit. Sin nullius magistri, sed suæ ipsorum prudentiæ dictamen sit, ostendant esse infallibile. Quod dicant sine exemplo esse, nihil moror: quæram enim vicissim, quis fuit ille qui alia methodo duplicationem cubi demonstravit. Euclides multas habet in initio Elementorum definitiones, quibus tamen nusquam utitur. An definitiones ad demonstrationes minus necessariæ sunt, quam assumpta. Analytici omnes assumunt aliquid ignotum; etsi ab ignoto per se notum fieri nihil potest: sed ope aliorum præcognitorum problemata multa aut solvunt, aut solvi non posse demonstrant. An verum positum minus valebit, quam pro vero suppositum dubium? Errant qui sic sentiunt. Verum enim tam sui quam falsi index est, ut a quo nihil nisi verum derivatur.

Sed ne quid omittamus quod problemati nobili perspecuitatem allaturum videatur, eandem nunc conclusionem ab eo ipso demonstrabimus, quod recta AO æqualis sumpta sit rectæ DE, id est, mediæ proportionali inter extremas AD et DV.

Sumatur in latere DC recta DF æqualis DV, et

describatur quadratum DF*rg*. Erit autem punctum *r* in diagonali DB. APPENDIX.

Describatur quadratum DX*pq*, et erit punctum *p* in eadem diagonali DB.

Describatur quadratum DE*kl*; cujus etiam punctum *k* erit in eadem diagonali DB. Secet autem *lk* producta latus BC in *n*, et rectam X*p* productam in *u* et rectam F*r* productam in *s*.

Describatur denique quadratum DM*ih*, cujus punctum *i* erit in eadem diagonali DB; cujus quidem latus *hi* productum secet *ln* in *o*, et AB in *t*; latus autem M*i* productum secet BC in *m*.

Ostensum autem est tres rectas DM, DX, DV, id est M*i*, *qp*, *gr* esse continue proportionales; item OM, DV, id est OM, *g*A esse æquales; et proinde, dempta communi *g*M, æquales esse AM et O*g*, id est, *ti*, vel *im*, vel FE, et propterea rectam *g*M æqualem esse EC, vel *kn*, vel *os*.

Quoniam jam *lk* media est proportionalis inter *ln* et *ls*, erunt tres rectæ *ls*, *lk*, *ln* continue proportionales. Erunt item *gr*, *qp*, M*i*, id est *ls*, *lu*, *lo* continue proportionales. Est autem utriusque analogismi eadem antecedens *ls*. Quare (per prop. 28, Elem. xiv) ratio *ln* ad *lo* duplicata erit rationis *lk* ad *lu*. Sed ut *lk* ad *lu*, ita est M*i* ad *lk*.

Ratio ergo *ln* ad *lo* duplicata est rationis *lo*, sive M*i*, ad *lk*.

Sed ratio quadrati D*hi*M ad quadratum DE*kl* duplicata est rationis M*i*, id est *lo*, ad *lk*.

Si ergo quadratum D*hi*M intelligatur ductum perpendiculariter in suum latus M*i*, item quadratum DE*kl* perpendiculariter in rectam *ln* æqualem lateri AD, fient duo parallelipipeda quorum latera

APPENDIX. et altitudines reciprocantur. Quare (per prop. 34, Elem. xi) erit cubus a DM (cubus autem est parallelipipedum) æqualis parallelipipedo, cujus basis est æqualis quadrato DE*kl*, altitudo æqualis *ln* sive AD.

Sed quadratum DE*kl* æquale est rectangulo sub AD, DV, id est, rectangulo MR: parallelipipedum autem sub rectangulo MR ductum in OR æqualem AD, est dimidium cubi totius a latere AD, id est, æquale quatuor cubis a latere DV. Itaque recta DM est mediarum duarum inter AD, DV major, etc. Quod erat demonstrandum.

Ostendam jam rectam DO semissem esse tangentis 30 graduum. Secet RO rectam E*k* in *y*; eritque O*y* sinus 45 graduum. Itaque utraque rectarum A*y*, D*k* æqualis erit AB, videlicet lateri totius quadrati ABCD. Circulus ergo descriptus radio DC transibit per *k*, et circulus descriptus radio AB transibit per *y*.

A puncto *y* erigatur recta *y*α perpendicularis ipsi A*y*, secans BC in α, producaturque α*y* ad latus CD in *z*. Erit ergo triangulum Cα*z* æquicrurum, et anguli ejus ad α et *z* semirecti. Producatur *gr* ut secet arcum C*k* in β, eritque angulus DCβ tertia pars recti. Quare producta Dβ faciet cum latere CB angulum æqualem duabus tertiis recti.

Quoniam autem angulus R*y*α est semirectus, et angulus CDβ tertia pars recti, faciet Dβ producta cum *y*α angulum anguli recti partem sextam. Sed angulus Rα*y*, qui etiam est semirectus, una cum sexta parte recti faciet duas tertias recti. Quare juncta αβ et producta incidet in D. Est ergo Cα tangens anguli 30 graduum, et huic æqualis C*z*.

Sed, propter angulum $Cy\alpha$ rectum divisum bifariam ab Ry, recta $C\alpha$ dupla est rectæ CR, id est, rectæ DO. APPENDIX.

Coroll. i. Quoniam DV est semissis lateris BC, et DO semissis adjunctæ $C\delta$, et ducta $A\delta$ transit (ut supra ostensum est) per X; erit ratio $B\delta$ ad DX duplicata rationis AD ad DX. Quare ratio OV, sive Dh (semissis ipsius $B\delta$), ad DF (semissem ipsius AD), duplicata erit rationis AD ad DX, id est, eadem ratio quam habet DC ad DX. Ut ergo DC ad DX, ita est OV sive Dh ad DF. Sunt ergo rursus DC, Dh, DF continue proportionales.

Coroll. ii. Jungatur gy, producaturque ad RC in γ. Quoniam ergo Ay dupla est Ag, erit quoque (propter similitudinem triangulorum Ayg, $Cy\gamma$) recta yC dupla $C\gamma$. Itaque $C\gamma$, Bm sunt æquales: et $R\gamma$, quæ est differentia inter CR et $C\gamma$, æqualis differentiæ inter dimidium lateris et tangentem 30 graduum.

Coroll. iii. Dupla ry æqualis est tangenti 30 graduum, nempe rectæ $C\alpha$. Nam Ry, yr sunt æquales.

Coroll. iv. Semissis circumferentiæ circuli descripti a gr semiradio, æqualis est lateribus ambobus cuborum quorum unus circumscribitur, alter inscribitur eidem sphæræ in qua maximus circulus est qui describitur radio gr semissi lateris AB; quod sic ostendo. Si in quadratorum eorum quæ cubi bases sunt, uno quocunque ducatur diagonalis, erit quadratum ejus duplum quadrati a latere cubi. Rursus si in termino alterutro illius diagonalis erigatur perpendicularis æqualis cubi lateri, recta quæ subtendit diagonalem, et latus illud cubi erectum,

APPENDIX. poterit triplum cubi latus. Erit autem illa subtendens maxima omnium rectarum quæ intra cubum duci possunt; et per consequens, diameter erit sphæræ cui cubus inscribitur. Nam diameter sphæræ triplum potest lateris cubi in illa sphæra inscripti.

Centro *r*, radio *gr* semisse lateris AB, describatur circulus $\eta\zeta g$F, ducaturque $\gamma\pi$ parallela et æqualis CD, secans diagonalem AC in μ. Quoniam ergo γm æqualis est tangenti Ca, si jungatur μi, erit illa æqualis eidem Ca; cujus quadratum est $\mu i\nu\lambda$. Quoniam ergo latus DC triplum potest rectæ Ca, (ut manifestum est ex eo quod sinus 60 graduum triplum potest semiradii, et ut sinus 60 graduum ad semiradium, ita radius ad tangentem 30 graduum), erit cubus cujus quadratum est $\mu i\nu\lambda$, inscriptus in sphæra cujus maximus circulus est $\eta\zeta g$F. Manifestum autem est cubum cujus unum quadratum est ABCD circumscriptum esse sphæræ eidem $\eta\zeta g$F; et ostensum est rectam compositam ex latere AB cubi circumscripti, et Ca, id est, μi latere cubi inscripti, æqualem esse arcui quadrantis BD, id est semissi circuli $\eta\zeta g$F.

Postremo, eadem hæc comparemus cum numeris; et (quia radix numeri non semper est numerus) quadrata ipsi in numeros convertemus.

Producatur BC in δ, ita ut Bδ possit decem quadrata a recta DV sive DF; jungaturque Aδ, quæ secabit DC in X: quod sic ostendo.

Quoniam Bδ potest decem quadrata a DV, et AB potest quatuor quadrata ab eadem DV, erit quadratum a Bδ 10, quorum quadratum ab AB sive DC est 4; sive quorum quadratum a Bδ est 40,

eorum quadratum a DC est 16. Est autem ut 40 ad 16, ita 16 ad $6\frac{2}{5}$. APPENDIX.

Cumque D*h* ostensa sit semissis totius Bδ, poterit D*h* decem quadrata a semisse ipsius DV, sive a quarta parte lateris DC.

Quadratum ergo a DC ad quadratum a D*h* sive a DM, est ut 16 ad 10.

Rursus ut 16 ad 10, ita est $6\frac{2}{5}$ ad 4. Sed quadratum a DF est 4, quorum quadratum a DC est 16. Quare latus quadrati 16 est ad latus quadrati 10, ut latus quadrati $6\frac{2}{5}$ ad latus quadrati 4. Quare rectæ DC, D*h*, latus quadrati $6\frac{2}{5}$, DF sunt proportionales.

Sed ostensum est esse ut DC ad D*h*, ita DX ad DF. Latus ergo quadrati $6\frac{2}{5}$ est ipsa DX.

Sequitur hinc, primo, rectam DX esse mediam proportionalem inter DC, et duas quintas ejusdem DC. Quadratum enim a DX, nempe DX*pq*, est duæ quintæ quadrati a DC; quia $3\frac{1}{5}$ est quinta pars 16, et $6\frac{2}{5}$ duæ quintæ ejusdem quadrati a DC; et propterea æquale rectangulo sub DC et duabus quintis ejusdem DC.

Sequitur secundo, quod ducta AX et producta ad occursum BC productæ in δ, rectam Bδ posse 10 quadrata a DF.

Sequitur tertio, rectam DE, quæ est media proportionalis inter DC et DF, mediam quoque esse inter D*h* et DX. Cum enim quadratum a D*h* sit 10, quorum quadratum a DC est 16, et quadratum a DE 8; si fiat ut 10 ad 8 ita 8 ad tertium, erit illud tertium $6\frac{2}{5}$. Unde patet etiam hoc, rationem DF ad DE esse ad rationem DF ad DX, ut subtriplicata ad subduplicatam, ut illi loquuntur; ego

APPENDIX. autem malim dicere, ut tres rationes minoris ad majus, ad duas rationes minoris item ad majus.

Sequitur quarto, rectam Bδ esse ad DX ut 5 ad 2. Cum enim quadratum a Bδ sit ad quadratum a DC ut 40 ad 16, id est ut 5 ad 2, et ut quadratum a Bδ ad quadratum a DC, ita ipsa Bδ (quia quadrata sunt in duplicata ratione laterum) ad DX, erit Bδ ad DX ut 5 ad 2; et quadratum a Bδ ad quadratum a DF ut 25 ad $2\frac{1}{2}$, id est ut 10 ad 1; et ipsam Bδ ad DF ut *l.* 10 quadrata ad *l.* 1*. Atque hactenus quidem calculi geometricus et arithmeticus consentiunt inter se et cum Euclide.

Sunt autem rectæ D*h* sive DM, DX, DF sive DV, continue proportionales, propter semicirculum MXV. Quare etiam earundem quadrata sunt continue proportionalia. Atqui si reducantur ad numeros, numeri illi proportionales non erunt. Est enim quadratum a D*h* 10, quorum quadratum a DX est $6\frac{2}{5}$, et quadratum a DF 4. Qui numeri non sunt proportionales. Reducantur enim ad numeros integros, quod fiet multiplicando singulos per 5. Facti autem erunt 50, 32, 20, qui proportionales non sunt. Sunt enim 50, 32, $20\frac{24}{50}$ continue proportionales; quorum minimus est justo major. Continue item proportionales sunt DC, D*h*, DX, quibus respondent numeri 16, 10, $6\frac{2}{5}$; qui proportionales non sunt. Nam reducti ad integros fient 80, 50, 32; qui proportionales non sunt. Proportionales enim sunt 80, 50, $31\frac{1}{4}$, quorum minimus est justo minor.

Unde autem nascitur hæc geometriæ et arithmeticæ dissentio? Ab eo quod subtendens trianguli rectanguli non semper potest latera duo angulo

---

* Sic edit. 1666 et 1668.

recto adjacentia, cum subtendens illa non sit linea, sed minutum triangulum; cujus si punctum verticale computetur pro nihilo, terminus alter erit trianguli minuti basis. APPENDIX.

Cum enim duæ rectæ BA, BC punctum habent commune B quantitate carens; si ab eodem puncto B ducatur tertia recta faciens angulum quemcunque cum BA vel BC, illa tertia propior erit utrivis duarum BA, BC, quam altera earum alteri; et propterea habebit tertia illa cum utravis priorum plus quam punctum commune, id est communem partem. Quare tres illæ rectæ una eademque erunt recta. Item propter eandem causam, totum circuli planum erit linea recta. Quod satis est absurdum.

Recta ergo subtendens pro linea haberi non potest, nisi quæ sit diagonalis quadrati. Illa enim dividit angulum rectum bifariam: id quod non facit diagonalis rectanguli non quadrati. Unde necesse est numerantibus quadrata, (quia minutissimi trianguli basis, quantulacunque ea sit, quantitas tamen est), unam et eandem quantitatem sæpius numerare.

Si denique cubos ipsos per numeros investigare volumus, impossibile volumus; quia quadratum multiplicatum per numerum facit semper quadrata, quorum nulla multitudo faciet cubum.

Causa ergo quare problemata illa, metiendi circulum, duplicandi cubum, dividendi angulum, dividendi rationem, et alia multa inventa hactenus non fuerint, nulla assignari potest præter has: 1°. Quod ad ea invenienda abusi sunt arithmetica: 2°. Quod errores antiquorum recentiores nimium venerati sunt. 3°. Quod qui errores illos conati sunt dete-

APPENDIX. gere, eos imperiti homines (ne sua inscitia simul detegeretur) convitiis absterruerunt. Quibus tamen omnibus propter rei difficultatem, et antiquitatis reverentiam, ignosci potest, præterquam ultimis illis convitiatoribus, non geometris, sed insulsis, indignis geometriæ procis.

FINIS.

QUADRATURA CIRCULI.

CUBATIO SPHÆRÆ.

DUPLICATIO CUBI.

UNA CUM RESPONSIONE AD OBJECTIONES GEOMETRIÆ PROFESSORIS SAVILIANÆ OXONIÆ EDITAS ANNO 1669.

AUTHORE

THOMA HOBBES

MALMESBURIENSI.

AD SERENISSIMUM PRINCIPEM

COSIMUM

MAGNUM PRINCIPEM ETRURIÆ

EPISTOLA AUTHORIS DEDICATORIA.

Quo tempore, Magne Princeps, celsitudo tua cum dignitate sua summa et populi universi plausu Anglorum terram, urbes, scientiarumque domicilia illustrabat: recentem a prælo opellam hanc celsitudini tuæ, humanitatis suæ* radiis etiam ad me penetrantibus excitatus, cupiebam dedicare. Sed antequam id facerem, æmulorum meorum reprehensiones expectandas esse censui: certus, nisi refellerent, non indignum fore quantocunque patrocinio hoc munusculum. Prodiit autem nuperrime refutatio ex Academia Oxoniensi; typis Academicis; authore, geometriæ publico Professore; argumentis arithmeticis. Illius ergo meisque collatis rationibus, quæ in titulo operis pollicitus sum confirmare debeo: et facio accurate in libello hoc quem tibi nunc offero; brevem, ut occupato; tibi, ut certaminum hujusmodi incorrupto, nec imperito judici. Scio philosophiam seriam unicam esse, quæ versatur circa pacem et for-

---

* Sic edit. 1669.

tunas civium, principalem: cæteras nihil esse præter ludum. Ludimus enim otiosi in nominibus Grammatici, in syllogismis Logici, in sonis Musici, in numeris Arithmetici, in motu Physici, in figuris Geometræ, dum otium nostrum negotia tuentur Principum. Nec tamen nihil agere videmur nobismet ipsis. Prædia sunt geometris problemata, possidentque ea plerique quasi jure feudali ab antiquis geometriæ dominis Euclide, Archimede, aliisque, per servitudinem et pertinaciam. Schola illis Prætorium est, ubi verum constituunt suo arbitrio. Jure occupationis inventum novum non acquiritur: nimirum, quod quisque ingenii sui proprium opus esse judicavit, si parum festinanti præripiat alter, injuria est. Legem hanc supercilio damnari iniquam non patior. Ratio, si afferatur, vincat. Sed lectori neque intellectum neque patientiam præstare debeo. Itaque provoco ad exteros, atque etiam ad posteros, sub tuo, MAGNE PRINCEPS, nomine, cui quæ cupis omnia Deus comprobet, et quæ agis secundet.

Serenissimæ celsitudinis tuæ

servorum humillimus

THOMAS HOBBES.

QUADRATURA CIRCULI.

PROPOSITIO I.

Circulo dato quadratum invenire æquale.

SIT (in fig. 1) circulus datus BCDE, cujus centrum A, divisus quadrifariam a diametris BD, CE. Circulo hinc circumscribatur quadratum FGHI, quod tangit circulum in punctis B, C, D, E. Ducantur diagonales GI, HF, secantes circulum in punctis K, L, M, N. Secetur semilatus CG bifariam in O, ducaturque AO secans circulum in P. Per punctum P ducatur recta QR parallela GH, secans AG, AH in Q et R, et AC in Y: compleaturque quadratum QRST. Dico quadratum QRST æquale esse circulo BCDE dato. PROP. I.

Quoniam enim recta CG secta est bifariam in O, et triangulorum ACG, AYQ bases CG, YQ sunt parallelæ, etiam basis YQ secta est bifariam in P: et proinde triangula AYP, APQ sunt æqualia.

In arcu LC sumatur arcus LV æqualis arcui CP: ducaturque AV, secans YP in X.

Jam APL + PQL + CYP = AVL = ACP, quia APL + PQL = AYP. Nam ACV + AVP = ACP = AVL.

Quare APL + PQL + CYP = ACV + AVP.

Ablatis igitur utrinque æqualibus APL, ACV, restant PQL + CYP = AVP.

PROP. I. Quoniam ergo AVP sector additus sectoribus duobus ACV, APL, facit integrum sectorem ACL; etiam duo trilinea PQL, CYP addita sectoribus iisdem ACV, APL, facient quantitatem æqualem sectori integro ACL.

Jam trilineum PQL additum sectori ALP facit triangulum APQ. Et (quia ALP, ACV, sectores sunt æquales, et triangula AYP, APQ æqualia) trilineum idem PQL additum sectori ACV facit triangulum AYP.

Si ergo PQL, CYP sunt æqualia, totum triangulum AYQ æquale erit sectori integro ACL. Sin PQL sit majus vel minus quam CYP, triangulum AYQ erit majus vel minus sectore ACL. Aut ergo in triangulo ACG triangulum rectangulum cujus vertex sit A, æquale sectori ACL sumi nullum potest, aut PQL, CYP sunt æqualia. Nam si ACV, ALP æqualibus, addatur dimidium sectoris utrinque, fient duo triangula sectori ACL æqualia. Itaque quantum trianguli alterius erit intra circulum, tantum alterius erit extra. Quod fieri impossibile est præterquam in concursu rectæ AO cum RQ et CL ad P. Alioqui enim aut triangulum aut quantitas AVP non dividetur bifariam.

Aliter, directe.

Sector ACP superat sectorem ACV quantitate AVP. Ergo ACP superat triangulum AYP quantitate AVP—CYP. Superat autem quantitate ipsa CYP. Sunt ergo AVP—CYP et CYP æqualia.

Addito utrinque CYP, erunt AVP et 2CYP æqualia. Et quia AVP æqualis est ambobus spatiis PQL et CYP, erunt PQL et CYP æqualia.

Aliter, directe.

Trilineo CVP ablato a sectore AVP, restat triangulum AXP. Ergo trilineo toto CYP ablato ab eodem sectore AVP, restabit triangulam AYP. PROP. I.

Ergo sector ACP superat triangulum AYP quantitate AVP—CYP. Sed AVP—CYP est æquale PQL. Itaque sector ACP superat AYP quantitate PQL. Ergo CYP et PQL sunt æqualia. Addito ergo utrinque CYP, erunt AVP et 2CYP æqualia. Et est ergo sector AVP duplus trilinei CYP. Cum igitur idem AVP æqualis sit ambobus trilineis PQL et CYP, erunt ipsa PQL et CYP inter se æqualia. Quorum alterum PQL totum prominet extra sectorem ACL, alterum, nempe CYP, totum in eodem sectore ACL est immersum.

Quare triangula AYP, APQ simul sumpta, id est octava pars totius quadrati QRST, æqualia sunt duobus sectoribus ACP, APL simul sumptis, id est octavæ parti totius circuli BCDE dati: et totum quadratum QRST æquale circulo integro BCDE.

Aliter.

Si triangulum rectangulum AYQ sectori ACL æquale non sit, supponatur triangulum aliud, primo, minus quam AYQ sed simile, habens verticem in A, latus A*q*, et basim *yq*, æquale esse sectori ACL. Basis autem *yq* secet arcum CL in *p*, et rectas AO, AG in *r* et *q*.

Quoniam igitur triangulum A*yq* æquale est, ut supponitur, sectori ACL, erunt trilinea *q*L*p*, C*yp* æqualia. Et quia supponitur *q*L*p* dimidium esse sectoris AVP, erit sector ACV una cum trilineo C*yp*, æquale sectori ALP una cum trilineo *q*L*p*,

PROP. I. idemque æquale triangulo A*qr*. Rursus, quia triangulum A*yq* æquale est sectori ACL, erunt trilinea *q*L*p* et C*yp* æqualia, et ambo simul æqualia sectori AVP. Et proinde ACV+C*yp* æquale dimidio sectori ACL, id est triangulo A*yr*: totum parti, quod est absurdum.

Similiter, sector ALP una cum trilineo *q*L*p* æquale erit triangulo A*qr*, id est, pars toti: quod est absurdum.

Si A*yq* sumeretur supra triangulum AYQ, idem sequeretur absurdum.

Est ergo triangulum ipsum AYQ æquale sectori ACL: id est, octava pars quadrati QRST duobus sectoribus ACP, APL simul sumptis, id est octavæ parti totius circuli BCDE dati: et totum quadratum QRST æquale circulo integro BCDE.

Inventum est ergo circulo dato quadratum æquale.

Coroll. i. Si centro A, semidiametro A*b*, quæ sit media proportionalis inter latus AC et ipsius dimidium, describatur arcus circuli secans AO in *b*, et AV in *c*, et AC in *h*, erit tum sectorculus A*bc*, tum quadrilineum VP*bc*, æquale trilineo CYP. Præterea, si a puncto *b* ad latus AC ducatur perpendicularis *be*, erit trilineum *hbe* dimidium trilinei CYP.

Coroll. ii. Sequitur etiam excessum quadrati ABGC supra quadrantem ABC, esse ad excessum quadrantis ejusdem supra dimidium quadrati ABGC, ut 2 ad 3.

Ducta enim a puncto L ad latus AC perpendiculari L*h*, erit triangulum AL*h* dimidium trianguli AGC.

Jam triangulum AGC ad triangulum AYQ est ut 5 ad 4. PROP. I.

Ergo trapezium CYQG est 1, quorum triangulum AGC est 5, et triangulum AYQ 4, et triangulum AL*h* $1\frac{1}{2}$. Et quia triangulum AYQ sectori ACL est æquale, triangulum AGC est 5, quorum sector ACL est 4. Ergo trilineum CLG est 1, quorum sector ACL est 4: idemque trilineum CLG æquale trapezio CYQG.

Quoniam ergo triangulum AL*h* est $1\frac{1}{2}$, quorum trilineum CLG est 1, et trilineum CLBG (ipsius CLG duplum) 2, qui est excessus quadrati ABGC supra quadrantem ABC: et trilineum CL*h* duplicatum, nempe excessus quadrantis ABC supra AL*h* duplicatum, erit 3 quorum trilineum CLBG est 2. Est ergo excessus quadrati ABGC supra quadrantem ad excessum quadrantis supra dimidium quadrati ABGC, ut 2 ad 3. Quod erat demonstrandum.

CUBATIO SPHÆRÆ.

PROPOSITIO II.

Sphæræ cujus diameter est CE, *æqualem invenire cubum.*

Si enim (supposito quod planum quadrati FGHI sit in horizonte) erigantur in punctis C, Y, P, Q, L, β, B, γ, T, K, δ, E, π, ϵ, S, N, ζ, D, η, R, M, θ, perpendiculares altitudine quanta est recta AC super horizontem: planum ductum per illarum terminos

PROP. II. erit quadrato FGHI parallelum, et distinctum partibus iisdem quibus distinguitur quadratum ipsum FGHI in dictis punctis. Atque idem continget, si eædem perpendiculares productæ sint ad eandem altitudinem, AC, infra horizontem.

Similiter, si in punctis Q, P, θ, R, η, ζ, S, ε, δ, T, γ, β, in altitudinem AY erigantur perpendiculares supra horizontem, planum ductum per illarum terminos erit quadrato QRST parellelum. Atque idem continget etiam infra horizontem: eruntque facti duo cubi, quorum latera sunt GH et QR. Super centrum A constituatur quadratum *adfg* æquale duabus tertiis totius quadrati GHIF. Quoniam ergo quadratum QRST æquale est circulo BDCE, si ad puncta Q, R, S, T erigantur rectæ perpendiculares quarum unaquæque æqualis sit diametro CE, fiet solidum rectangulum æquale cylindro constituto in eadem altitudine.

Hujus cylindri duæ tertiæ æquales sunt (per Archimedem) sphæræ a diametro CE: nempe, parallelipipedum rectangulum cujus altitudo est *ag*, et duæ dimensiones reliquæ sunt TR et QR, æquale erit sphæræ. Inter latus TQ et altitudinem *ag* sumatur media proportionalis *kn*, compleaturque quadratum *klmn*. Quoniam ergo latera TQ, *kn*, *ag* sunt continue proportionalia, erit quadratum *klmn* æquale rectangulo sub TQ, *ag*. Quare quadratum *klmn* ductum in suum latus *kn* æquale erit solido sub TQ, *kn*, *ag*. Quoniam ergo ratio quadrati *akn* ad quadratum ab *ag*, duplicata est rationis quam habet altitudo *kn* ad *ag*, et altitudo TQ ad altitudinem *ag* duplicatam habet rationem ejus quam habet altitudo TQ ad altitudinem *kn*, erunt bases solidorum sub TQ, *kn*, *ag*, et altitudines eorundem

solidorum reciprocæ. Quare (per Euclid. Elem. xi. prop. 34) cubus a *kn*, et solidum sub TQ et quadrato ab *ag*, sunt æqualia. Sed solidum sub TQ et quadrato ab *ag*, æquale est sphæræ cujus diameter est CE. Quare cubus a *kn* æqualis est sphæræ eidem. PROP. II.

Inventus ergo est cubus sphæræ æqualis.

PROPOSITIO III.

Invenire rectam æqualem arcui CL.

Repetatur in figura secunda pars figuræ primæ, in qua quadratum QRST æquale est circulo BCDE. Centro A, intervallo AY describatur arcus circuli secans AO in *d*, et AG in *b*: et per punctum *d* ducatur recta Z*c* parallela GC, secans AC in Z et AG in *c*.

Dico rectam Z*c* æqualem esse arcui CL.

Nam CG, YQ, Z*c* sunt continue proportionales. Et (per Archimedem *de Dimensione Circuli*) triangulum rectangulum, cujus latus unum circa angulum rectum æquale est perimetro circuli, et latus alterum æquale semidiametro, æquale est totius circuli areæ.

Ergo rectangulum sub semiperimetro et radio, æquale est areæ ejusdem circuli.

Ergo rectangulum sub parte quarta perimetri et radio, æquale est areæ semicirculi BCD.

Ergo rectangulum sub octava parte perimetri et radio, id est rectangulum sub AC et arcu CL, æquale est areæ quadrantis ACB.

Ergo quadratum a media proportionali inter AC et arcum CL, æquale est areæ quadrantis ejusdem ACB.

Sed quadratum ab YQ æquale est areæ quadrantis ACB.

Ergo YQ est media proportionalis inter AC vel CG, et arcum CL.

Sed YQ est media proportionalis inter CG et Z*c*.

Ergo Z*c* æqualis est arcui CL, sive octavæ parti totius perimetri BCDE, id est semissi arcus CB.

PROPOSITIO IV.

Si in latere CG *producto sumatur* Gi *dupla rectæ* Zc, *jungaturque* Bi *secans* AC *in* e: *erit arcus quadrantis descripti radio* Ae *æqualis lateri* GC.

Cum enim recta Z*c* æqualis sit arcui CL, erit recta G*i* æqualis arcui BC. Sunt autem triangula BG*i*, BA*e* similia. Quare ut G*i* ad BG, ita BA, id est BG, ad A*e*. Sed G*i* æqualis est arcui quadrantis descripti radio BG. Quare latus BG æquale est arcui quadrantis descripti radio A*e*.

Sequitur hinc arcum *ef*, secantem AG in *f* et AO in *g*, æqualem esse semissi lateris AC, et esse ad rectam Z*c* ut radius ad quadrantem suæ perimetri.

PROPOSITIO V.

A puncto L *ducatur recta* Lh *parallela lateri* GC, *secans* AC *in* h: *et* eb *parallela eidem lateri* GC, *secans* AG *in* b *et* AC *in* e. *Dico jam tres rectas* Zc, hL, eb, *sive* AZ, Ah, Ae, *esse continue proportionales*.

Cum enim G*i*, AC, *eb* sint continue proportionales, item AG, AC, *h*L continue proportionales, et AC utrobique media; erit ut G*i* ad AG, ita reciproce *h*L ad *eb*. Quare ut G*i* ad AG, (id est Z*c*,

semissis ipsius G*i*, ad *h*L, semissem ipsius AG), ita *h*L ad *eb*. PROP. V.

Sunt ergo Z*c*, *h*L, *eb*, sive AZ, A*h*, A*e*, continue proportionales.

Constat hinc rectam AQ æqualem esse duplæ *eb*.

Constat præterea arcum Z*n*, ductum a radio AZ et terminatum in AG, et rectam L*h*, secare rectam AO in uno et eodem puncto. Alioqui non essent Z*c*, *h*L, *eb* continue proportionales.

PROPOSITIO VI.

Ut latus CG *vel* AC, *ad* Zc *vel* AZ, *ita est* Ae *ad semissem lateris* CG *vel* AC.

Secetur enim AC bifariam in *k*, ducaturque *kl* parallela CG, secans AG in *l*. Quoniam ostensum est G*i*, CG, A*e* esse continue proportionales, erit ut GC ad semissem G*i*, ita A*e* ad semissem lateris CG, id est, ut AC vel CG ad Z*c* vel AZ, ita A*e* vel *eb* ad A*k* vel *kl*.

PROPOSITIO VII.

Quadratum ab AZ *vel* Zc *æquale est decem quadratis a quarta parte lateris* AC.

Quadratum enim ab AO æquale est quinque quadratis a semiradio CO, id est, viginti quadratis a quarta parte AC. Sed AO, A*c* sunt æquales. Quare quadratum ab A*c* æquale est viginti quadratis a quarta parte AC. Sed quadratum ab A*c* duplum est quadrati ab AZ vel Z*c*. Ergo quadratum ab AZ vel Z*c* æquale est decem quadratis a quarta parte lateris AC.

Coroll. Quadratum a G*i* quadruplum est quadrati ab AZ, et proinde quadratum a G*i* æquale est quadraginta quadratis a quarta parte lateris AC.

PROPOSITIO VIII.

PROP. VIII. *Viginti quinque quadrata a quinta parte arcus* BC *vel rectæ* GI, *æqualia sunt decem quadratis a semi-radio* CO.

Nam viginti quinque quadrata a quinta parte arcus BC, æqualia sunt quadrato ab ipso arcu BC sive a recta GI, id est (per præcedentem) decem quadratis a semi-radio CO: vel, quod idem est, quadraginta quadratis a quarta parte lateris AC.

Coroll. i. Decem quadrata a quinta parte arcus BC sunt æqualia quatuor quadratis a semi-radio CO, id est, ipsi quadrato ab AC: quia est ut 25 ad 10, ita 10 ad 4.

Coroll. ii. Item, quadratum a duabus quintis arcus BC æquale est quadrato ab A*e*: quia est ut 25 ad 10, ita 10 ad 4, et sunt arcus BC, radius AC, et recta A*e* continue proportionales.

Coroll. iii. Item, arcus quadrantis descripti a G*i* ut semi-diametro, æqualis est quintuplo semi-radio CO. Quadratum enim ab AC ad quadratum ab arcu BC est ut 4 ad 10, ratio autem 4 ad 10 semissis est subduplicata rationis 4 ad 25. Quare arcus descriptus a G*i* erit latus quadrati quod est æquale viginti quinque quadratis a semi-radio CO: quia quadratum ab AC, et quadratum a G*i*, et quadratum a quintupla CO, sunt continue proportionales.

Coroll. iv. Item, quintupla CO, recta G*i*, recta CG, recta A*e*, et $\frac{2}{5}$ radii AC, sunt continue proportionales. Quorum enim G*i* potest 25, eorundem AC potest 10. Quorum ergo AC potest 25, eorundem A*e* potest 10. Est ergo A*e* media proportionalis inter AC et duas quintas ejusdem. Ergo quintupla CO, recta G*i*, etc.

Coroll. v. Eadem A*e* æqualis est duabus quintis arcus BC. Nam quadrata a G*i*, AC, A*e*, sunt $\frac{25}{25}$, $\frac{10}{25}$, et $\frac{4}{25}$. Quare latus A*e* est $\frac{2}{5}$ arcus BC. PROP. VIII.

Notandum quod rectæ G*i*, AC, A*e* dupliciter æstimantur: uno modo per partes arcus BC, alio per partes radii AC.

PROPOSITIO IX.

Si a puncto n *ducatur recta* nm *parallela* CG, *secans* AC *in* m: *dico septem rectas* AC, AY, AZ, Ah, Ae, Am, Ak, *esse continue proportionales.*

Cum enim AC, AY, AZ sint continue proportionales, per constructionem: ostensumque sit AZ, A*h*, A*e* esse continue proportionales: positis ordine quantitatibus AC, AY, AZ, A*h*, A*e*, ratio AC ad A*e* erit (per Eucl. xiv. 28) duplicata rationis AY ad A*h*. Sed ratio AY ad AZ subduplicata est rationis AC ad AZ. Quare ratio AY ad AZ, eadem est cum ratione AZ ad A*h* vel A*h* ad A*e*. Sunt ergo AC, AY, AZ, A*h*, A*e* continue proportionales. Rursus, quia AC, A*h*, A*k* sunt continue proportionales: (nam A*h* æqualis est dimidiæ diagonali AG): et AZ, A*h*, A*e* sunt ostensæ continue proportionales: erit ut AC ad AZ, ita reciproce A*e* ad A*k*.

Quia denique tres rectæ A*b*, A*n*, A*l* sunt æquales tribus AY, AZ, A*h* continue proportionalibus, etiam ipsæ sunt continue proportionales.

Sunt ergo septem rectæ AC, AY, AZ, A*h*, A*e*, A*m*, A*k* continue proportionales.

Propositio hæc sine alia demonstratione perspicua est ab ipso diagramatis intuitu. Impossibile enim est ut septem rectæ continue proportionales sint in ratione CG ad QY, nisi arcus ab antecedente de-

PROP. IX. scriptus, et recta proxime consequens, se mutuo secent in recta AO: ut quemadmodum arcus ab AC secat YQ in P, ita arcus ab AY secet Zc in *d*.

PROPOSITIO X.

Calculus numericus quadratorum a septem antedictis rectis AC, AY, AZ, *etc.*

Manifestum est (per Eucl. i. 47) quod quadratum ab AO ad quadratum ab AC vel AP, est ut 5 ad 4; quia GC, æqualis AC, secta est bifariam in O: et est ut AO ad AC vel AP, ita AP ad AY vel YQ.

Rursus, quia YQ, parallela GC, secta est bifariam in P, quadratum ab AY vel YQ est ad quadratum a Z*c* ut 5 ad 4: quia GC, Z*c* sunt parallelæ, et recta AO secat arcum Y*b* ad *d*, et dividitur Z*c* bifariam in *d*.

Item, quadratum a Z*c*, quod est 10 quorum AC quadratum est 16, est ad quadratum ab *h*L, quod est 8 quorum AC quadratum est 16, ut 10 ad 8, id est ut 5 ad 4.

Item, quoniam quadratum ab AC ostensum est æquale 10 quadratis a quinta parte arcus BC, dimidium ejus, hoc est quadratum ab *h*L, æquale est quinque quadratis ab eadem quinta parte arcus BC. Sed ostensum est rectam *eb*, vel A*e*, æquale esse duabus quintis arcus BC, et proinde quadratum ejus æquale esse quatuor quadratis a quinta parte arcus BC.

Est ergo quadratum ab *h*L sive A*h*, ad quadratum ab *eb* sive A*e*, ut 5 ad 4.

Postremo, cum quadrata ab AC, AZ, A*e* sint continue proportionalia in ratione 16 ad 10 sive 10 ad $6\frac{1}{4}$, erit quadratum ab A*e* $6\frac{1}{4}$ eorum quorum quadra-

tum ab A*m* sunt quinque, (nam A*m* est semissis rectæ AO), et quadratum ab A*k* 4. Sed $6\frac{1}{4}$, 5, 4 sunt continue proportionales in ratione 5 ad 4. Nam multiplicatis omnibus per 4, fiunt (ratione non mutata) 25, 20, 16, quæ sunt in continua ratione 5 ad 4. PROP. X.

Etiam (intermissis quadratis alternis) quia quadratum ab A*c* est $\frac{10}{25}$ quadrati ab arcu BC, et quadratum ab AZ est $\frac{10}{16}$ quadrati ab AC, erit quadratum ab AC ad quadratum ab AZ, ut 25 ad 16, id est, in duplicata ratione 5 ad 4. Deinde, quia AZ est æqualis semissi arcus BC, quadratum ejus erit quarta pars quadrati ab arcu BC, id est, quorum quadratum ab arcu BC est 25, eorum quadratum ab AZ est $6\frac{1}{4}$. Quia autem quadratum ab AC est $\frac{10}{25}$ ejusdem quadrati ab arcu BC, quadratum ab *hL* erit $\frac{5}{25}$. Sed quadratum ab *eb* est $\frac{4}{25}$. Est ergo, rursus, quadratum ab AZ ad quadratum ab *eb* sive A*e* in duplicata ratione 5 ad 4. Nam $6\frac{1}{4}$, 5, 4 sunt continue proportionales.

Quare calculus arithmeticus demonstrationi geometricæ proxime præcedenti non repugnat.

Est tamen calculus alius arithmeticus, etiam verus, qui repugnat, demonstrationem tamen non destruit. Procedit autem calculus quem dico, per *Regulam Auream.*

Exempli causa: ostensum est quadratum a CG æquale esse 10 quadratis a quinta parte arcus BC; et rectam AQ duplam esse rectæ A*e*; et quadratum ab A*e* æquale esse 4 quadratis a quinta parte arcus BC; et proinde quadratum ab AQ æquale esse 16 quadratis a quinta parte arcus BC; et quadratum ab YQ æquale esse 8 quadratis ab

PROP. X. eadem quinta parte arcus BC : denique, quadratum a CG ad quadratum ab YQ esse ut 10 ad 8.

Examinemus hæc jam per *Regulam Auream.* Multiplicetur 8 in se, factus erit 64: qui divisus per 10, facit quotientem $6\frac{2}{5}$ pro quadrato a Z*c*. Sed quadratum a Z*c* est quarta pars quadrati a toto arcu BC, sive quarta pars 25 quadratorum a quinta parte arcus BC; et proinde erit $6\frac{1}{4}$ quorum GC quadratum est 10. Quare $6\frac{2}{5}$ et $6\frac{1}{4}$ debent esse æquales, nec sunt. Differunt enim in ratione $\frac{2}{5}$ ad $\frac{2}{8}$, id est ut 8 et 5, vel 16 et 10.

Rursus, quadratum a Z*c* æquale est 10 quadratis a quarta parte lateris CG, et quadratum ab *hL* æquale est 8 quadratis ab eadem quarta parte lateris CG. Quare quadratum ab *eb* deberet esse æquale $6\frac{2}{5}$ quadratis a quarta parte lateris CG. Sed quadratum ab *eb* sive A*e* ostensum est æquale $6\frac{1}{4}$ quadratis a quarta parte lateris CG. Itaque iterum reperitur dissensio similis prioris.

Rursus, quia quadratum a CG æquale est 10 quadratis a quinta parte arcus BC, quadratum ab *hL*, quod est dimidium quadrati a CG, erit æquale 5 quadratis ab eadem quinta parte arcus BC. Sed quadratum ab *eb* ostensum est æquale esse 4 quadratis ab eadem quinta parte arcus BC. Est ergo quadratum ab *hL* ad quadratum ab *eb* ut 5 ad 4. Fiat jam, juxta *Regulam Auream,* ut 5 ad 4 ita 4 ad tertiam; eritque illa tertia $3\frac{1}{5}$ pro quadrato rectæ *mn*. Quoniam autem recta AO, vel A*c*, ostensa est media proportionalis inter arcum BC et ejus semissem; erit quoque *mn*, quæ est semissis rectæ AO, media proportionalis inter arcum quadrantis descripti ab A*h* et semissem ejus, id est, inter Z*c*

et semissem ipsius Z*c*. Quadratum autem a Z*c* æquale est $6\frac{1}{4}$ quadratis a quinta parte arcus BC. Differunt ergo rursus eadem ratione qua ante. Præterea, quadrata ab *eb*, *mn*, *kl*, quia sunt in ratione quadratorum ab A*n*, A*l*, A*f*, id est in ratione quadratorum ab AZ, A*h*, A*e*, habebunt eodem modo calculum geometricum ab arithmetico diversum sicut illa, nempe ut per *Regulam Auream* quadratum ab A*k* vel *kl* majus justo sit quanto majus est $\frac{2}{5}$ quam $\frac{1}{4}$ unius unitatis. PROP. X.

Postremo, quia quadratum a CG (16) est ad quadratum a Z*c* (10) ut 16 ad 10, sive ut 10 ad $6\frac{1}{4}$, quadratum ab *eb* sive A*e* (ut ante ostensum est) erit $6\frac{1}{4}$: quod consentit cum calculo geometrico. Sed quadrata illa non sunt immediata, quia interponuntur quadrata ab YQ et *hL*.

Neque mirum videri debet, si calculus per *Regulam Auream* producat numerum majorem quam calculus per ipsa plana geometrica. Nam numerus est quantitates discretæ, in quibus una cum altera nihil habet commune, sed tot revera sunt res numeratæ quot numerantur. Quadrata autem hæc sunt quantitas una continua, quæ cum habeant quatuor latera unumquodque non contigua sed continua, quoties multiplicantur toties singula latera eadem numero numerantur, id est, unumquodque latus multiplicatur, et proinde faciunt numerum quadratorum justo majorem.

Hæc fuse, et (ut credo) perspicue explicui, ut sciant tandem geometræ qui plana metiri consueverunt per *Regulam Auream* vel per algebram, frustra se facere.

PROPOSITIO XI.

PROP. XI.

Si a centro A *ducatur recta A*a, *dividens arcum* PV *bifariam, secansque latus* CG *in* a, *erit* Ga *tangens arcus* 30 *graduum.*

Ducatur O*o* parallela lateri AC, secans latus BA in *o*, et arcum BC in *r*; et ducta B*r* producatur ad latus CG; illa recta abscindet tangentem 30 graduum, facietque cum GC angulum æqualem $\frac{2}{3}$ sive $\frac{8}{12}$ anguli recti. Rursus, quia duo arcus CV, LP sunt æquales, etiam totus arcus CL secabitur ab A*a* bifariam.

Est ergo angulus CA*a* quarta pars recti; et angulus C*a*A, sive BA*a*, tres quartæ unius recti, sive $\frac{9}{12}$ unius recti; et angulus AB*r* æqualis $\frac{8}{12}$ unius recti.

Anguli autem C*a*A et AB*r* faciunt $\frac{17}{12}$ unius recti. Ergo producta recta B*r* donec occurrat ubicunque rectæ C*a*, faciet cum ea angulum æqualem $\frac{7}{12}$ unius recti. Nam $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, et $\frac{7}{12}$, faciunt $\frac{24}{12}$, id est, duos rectos, id est, angulum æqualem omnibus simul angulis qui constitui possunt super unam rectam in quocunque puncto ad easdem partes.

Itaque producta B*r* incidet in *a*: et propterea G*a* æqualis est tangenti 30 graduum.

Coroll. Recta G*i*, quæ ostensa est æqualis arcui BC, æqualis quoque est rectæ compositæ ex semidiametro circuli et tangente 30 graduum.

Item, A*i*, quæ divisa est bifariam a *kl*, dividitur quoque bifariam a recta A*a*; et *ai* æqualis est lateri BA.

Item, manifestum est quod B*a*, secans arcus 30 graduum, transit per *b*. Producta enim *eb* ad BG

in q, erit Bq æqualis Ae; et qb, qG æquales: et cum BG+Ga, BG sive Bq+qb, et ipsa Bq sint continue proportionales, erit ut Bq ad qb ita CG ad Ga. Ducta ergo Bb incidet in punctum a. PROP. XI.

DUPLICATIO CUBI.

PROPOSITIO XII.

Latus cubi sphæræ circumscripti, additum lateri cubi in eadem sphæra inscripti, rectam constituunt æqualem semiperimetro maximi in sphæra circuli.

Cubus enim sphæræ circumscriptus habet pro latere BG. Est autem BG æqualis diametro sphæræ cubo inscriptæ, cujus latus est ipsa BG.

Quadratum autem a BG triplum est quadrati a Ga. Latus ergo cubi sphæræ inscripti est ipsa Ga.

Sed utrumque simul, latus cubi circumscripti et inscripti, nempe BG et Ga, ostensa sunt æqualia rectæ Gi, quæ recta ostensa est æqualis arcui BC. Arcus autem BC æqualis est semiperimetro maximi circuli inscripti cubo cujus latus est BG.

Recta As, quæ transit per intersectionem arcus CL et rectæ Zc, transit per cæteras omnes intersectiones arcuum et rectarum similes* et inter se æqualium. Ostensum enim est, æquales esse inter se arcum CL et rectam Zc.

Manifestum item est cubum a CG duplum esse cubi a Zc; et cubum a Zc duplum esse cubi ab eb; et cubum ab eb duplum esse cubi a kl, sive Ak.

* Sic edit. 1669.

PROP. XII. Constat item, si in recta GH, quæ est dupla CG, sumatur G*p* quæ sit dupla A*e*; cum G*i* sit dupla Z*c*; quatuor rectas GH, G*i*, G*p*, GC, esse continue proportionales. Itaque posito cubum a GH esse 64, cubus a G*i* erit 32, cubus a G*p* 16, cubus a GC 8, cubus a Z*c* 4, cubus ab *eb* 2, cubus a *kl* vel A*k* 1.

Item, sphæram medio loco proportionalem esse inter cubum a sui ipsius diametro, et cubum a quadrante perimetri circuli sui maximi.

Item, latera quinque figurarum regularium (in hac figura ii) distinguuntur sicut sequitur. Si centro P, intervallo PY vel PQ, describatur circulus, latus pentagoni circulo hinc inscripti erit latus icosahedri inscripti sphæræ cujus diameter est O*o*, centrum *l*. Nam quadratum ab YP vel PQ æquale est quinque quadratis a quinta parte diametri O*o* vel GC. Cum enim quadratum a GC æquale sit 25 quadratis a quinta sui parte, quadratum ab YQ æquale erit 20 quadratis a quinta parte ejusdem GC vel O*o*. Ergo quadratum ab YP vel PQ, nempe quarta pars quadrati ab YQ, æquale est quinque quadratis a quinta parte diametri O*o*. Quare (per Eucl. xiii. 16) latus icosahedri sphæræ inscripti cujus diamater est O*o*, æquale est lateri pentagoni inscripti circulo cujus diameter est YQ.

Latus cubi eidem sphæræ inscripti est recta G*a* vel C*i*, nempe tangens 30 graduum in circulo cujus semidiameter est BC. Nam BC, sive O*o*, triplum potest tangentis 30 graduum, ideoque (per Eucl. xiii. 15) G*a* est latus cubi inscripti eidem sphæræ.

Latus dodecahedri in eadem sphæra inscripti, est majus segmentum rectæ G*a*, id est lateris cubi, extrema et media ratione secti (per Eucl. xiii. 17).

Latus tetrahedri æquale est rectæ quæ subtendit

angulum rectum in triangulo cujus utrumque latus circa angulum rectum æquale est lateri cubi G*a*. Nam subtensa illa duplum potest rectæ G*a*. Quare potentia diametri O*o* potentiæ illius subtensæ est sesquialtera. Itaque subtensa illa est latus tetrahedri in eadem sphæra inscripti (per Eucl. xiii. 13). PROP. XII.

Postremo, latus octahedri eidem sphæræ inscripti, est A*l*, sive chorda quadrantis maximi in eadem sphæra circuli, cujus quadratum est dimidium quadrati ab O*o*: ideoque latus est octahedri in eadem sphæra inscripti (per Eucl. xiii. 14).

CONTRA libellum hunc prodiit nuper geometriæ in Academia Oxoniensi professoris publici, typis Academicis, Academiæ in prima pagina impressum habens sigillum, confutatio: nimirum, ut scirem certamen mihi fore contra geometriam Academicam. Scio; atque etiam contra geometras hodiernos fere universos. Video adversariorum magnum exercitum. Si non rationibus, sed fustibus decernendum esset, metuerem. Nunc non metuo. Hoc volui. Dignum habere adversarium, si non virtute, saltem numero volui. Volui etiam arithmeticam istam *speciosam* provocare, ut cum præstigias quas in geometria facere solita est, simul omnes publice ostentasset, totum illud artificium detectum a geometria in perpetuum ablegarem.

AD PROPOSITIONEM I.

Confitetur professor Academicus; si PQL,CYP sunt æqualia, totum triangulum AYQ æquale esse

AD PROP. I. sectori ACL. Reprehendit quod non sit demonstratum. Ego vero demonstratione indigere apud logicæ peritissimos non potui credere.

Secundo, *satis* inquit *est ad confutationem propositionis meæ disjunctivæ, quod non sit a me demonstrata. Non enim sibi*, dicit, *incumbere probare falsam esse, sed mihi incumbere probare veram esse.* Vide, lector, ingenium hominis mathematici, etiam extra geometriam. Mihine incumbit demonstrare esse veram? Quid est demonstrare, præterquam docere? Meum ergo est docere professorem publicum. Ille me accusat falsi. Ad quem pertinet probatio: ad accusatum, an ad accusatorem? Egone doceam professorem hunc publicum? Qua lege, quo merito hominis maledici? Sed nunc faciam, puto, ut tum ille, tum sequaces illius demonstrationes meas intelligant melius quam vellent.

Tertio, ut probet triangulum AYQ et sectorem ACL non esse æqualia, assumit, ut demonstratum ab Archimede, perimetrum circuli ad diametrum in minore ratione esse quam 22 ad 7. Id vero neque ab Archimede demonstratum est, neque illius methodo demonstrari potest. Procedit enim per extractionem radicum, assumitque radicem numeri quadratorum in quadrato majore contentorum, esse totius quadrati latus: quod est manifeste falsum. Nam radix numeri quadratorum est numerus aliquis quadratorum, non aliter quam radix 100 lapidum est 10 lapides.

Contra propositionis hujus corollaria nihil objicit, præterquam quod procedunt ex suppositione *quod* PQL *et* CYP *sunt tum inter se æqualia, tum simul sumpta æqualia* PAV. Bene est. Quoniam

ergo utraque hæc æqualitas ita manifeste demonstrata, ut a nemine unquam refellenda sit: tum propositio ipsa prima, tum utrumque ejus corollarium in tuto sunt. Objectiones ejus contra propositionem secundam differamus, ut ad cæteras ejus objectiones quæ ad plana pertinent, continue respondeamus,

AD PROPOSITIONEM III.

Contra hanc objicit, falsam esse propterea quod *labam contraxerit ex prop.* i *: assumens quadratum ab* YQ *æquale esse quadranti* ACB.

Resp. Quoniam ergo ita clare demonstratum est, ut dubitari amplius non possit quin quadratum ab YQ æquale sit quadranti, propositio hæc cum sua demonstratione salva est.

AD PROPOSITIONEM IV.

Ruit, inquit, propositio hæc quarta cum præcedente, ex qua dependet; sicut et corollarium ejus.

Respondeo, veram ergo esse tum propositionem, tum corollarium ejus: quia propositio præcedens manet inconcussa.

AD PROPOSITIONEM V.

Propositionem hanc quintam, nempe Z*c*, *h*L, *eb*, sive AZ, A*h*, A*e*, esse continue proportionales, concedit esse veram.

Corollarium autem utrumque negat. Quorum primum est, *rectam* AQ *æqualem esse duplæ* eb:

Manifestum est quadratum ab A*b* duplum esse quadrati ab A*e*, vel *ab*; sed quadratum ab A*b* æquale est quadrato ab AY. Est autem quadratum

AD PROP. V. ab AQ duplum quadrati ab AY. Ergo quadratum ab AQ quadruplum est quadrati ab *eb*. Itaque recta AQ dupla est rectæ *eb*.

Secundum corollarium erat, arcum Z*n*, ductum radio AZ, terminatum in AG, et rectam A*a*, secare rectam AO in eodem puncto.

Miror illum rem tam manifestam videre non potuisse. Concessit enim ad propositionem hanc, rectas Z*c*, *h*L, *eb*, sive AZ, A*h*, A*e*, esse continue proportionales. Quomodo ergo videre non potuit, easdem esse continue proportionales in ratione 5 ad 4 : cum quadratum ab AZ ad quadratum ab AY, id est quadratum ab A*n* ad quadratum A*b*, sit ut 4 ad 5, atque etiam quadratum ab A*b* sit ad quadratum AL ut 4 ad 5, quomodo ignorare potuit quadratum ab AL ad quadratum ab A*c* esse ut 4 ad 5 : atque adeo omnes rectas A*n*, A*b*, AL, A*c*, AQ, AG, esse continue proportionales, sicut et rectas omnes CG, YQ, Z*c*, *h*L, *eb*, *mn*, AC, AY, AZ, A*h*, A*m*, et proinde omnes ipsarum arcus secaturos omnes parallelas, quemadmodum arcus CL secat parallelam YQ in recta AO ad P, vel ut arcus Y*b* secat parallelam CL in AO ad *d*?

Præterea, quomodo videre non potuit quod sicut AQ dupla est *eb*, ita A*c* dupla sit *mn*, et AL dupla *kl*, et proinde septem rectas AC, AY, AZ, A*h*, A*e*, A*m* esse continue proportionales, et duas AZ, A*e* esse medias inter totam AC et semissem ejus A*k*? Probatum ergo est hoc loco cubum ab AC duplum esse cubi ab AZ, et cubum ab AZ duplum esse cubi ab *eb*, et cubum ab *eb* duplum esse cubi ab A*k*.

Itaque perfectissime demonstratum est ex iis quæ ille concessit et omnes sciunt vera esse, id quod demonstrare ab initio propositum erat.

Videant nunc geometræ omnes qui sunt vel erunt, an convellere hæc poterunt. Sin firma sint, videant an argumenta Professoris, quæ hic et in sequentibus in contrarium adducit arithmetica, digna sint responsione : et an Professor iste demonstrationum in geometria judex idoneus fuerit. Videant porro si quæstio deinceps inter me et arithmeticos de hac re, alia esse possit quam de rationum numerorum in geometria ineptitudine. Illis autem Professor, prop. 5, 7, 9, 10, 11, et 12, solis utitur. AD PROP. V.

AD PROPOSITIONEM VI.

Propositionem hanc absolvit. Sanæ ergo sunt, cum suis corollariis, prima, tertia, quarta, quinta et sexta.

AD PROPOSITIONEM VII.

Septima est, quadratum ab AZ, vel *Zc*, æquale est 10 quadratis a quarta parte radii: quam dicit esse falsam, et rectas AO, AZ pro æqualibus sumptas esse gratis.

Tuum est, lector, hoc dijudicare. Quadratum ab AO æquale est 5 quadratis a dimidia GC, id est, quadratum ab AO est æquale 20 quadratis a dimidia* GC. Nullum hic dubium est. Quare centro A, radio AO, si ducatur arcus circuli secans AG in *c*, quadratum ab A*c* æquale erit 20 quadratis a quarta parte GC, sive 20 decimissextis totius quadrati a GC; et propterea quadratum a *Zc* æquale est 10 decimissextis quadrati a GC.

Itaque absurde fecit Professor destruere conatus

---

* Sic edit. 1669. Quære "a quarte parte"?

AD PROP. VII. quod ante non modo confessus erat, sed etiam in objectionibus suis ad quintam propositionem demonstraverat: nimirum, Z*c*, *h*L, *eb*, et proinde etiam A*c*, AL, A*b*, esse continue proportionales. Non potuit enim non videre quadratum ab AL, sive ab AC, ad quadratum ab AY sive A*b*, esse ut 5 ad 4: et per consequens, quadratum ab A*c* ad quadratum ab AL esse etiam ut 5 ad 4: ideoque AO, A*c* esse æquales: ex eo autem quod quadratum Z*c* æquale est 10 decimissextis quadrati GC, sequi (quod absque eo manifestum est) quadratum ab *h*L æquale esse 8 decimissextis, sive dimidio, quadrati a GC: et per consequens etiam A*h*, A*e*, A*m*, A*k*, et præterea AC, AZ, A*e*, A*k*, esse continue proportionales. Quæ est duplicatio cubi ex ipsius Professoris concessis.

Sed eadem rursus demonstratione sua evertit: cujus sententia hæc est. Si GC divisa sit quinquefariam, quadratum totius erit æquale 25 quadratis a parte sua quinta. Et quia recta AZ, vel Z*c*, est $\frac{4}{5}$ rectæ GC: quadratum a Z*c* æquale erit $\frac{16}{25}$ quadrati a GC. Sed $\frac{16}{25}$ majus est quam $\frac{10}{16}$.

Vera hæc esse agnosco, et quadratum hoc numericum esse 25 quorum quadratum Z*c* est 16, et singula distincta a sibi proximis, tribus longitudinibus sine latitudine, quarum (per Euclidem) duæ sunt ipsorum quadratorum contiguorum termini, tertia est inter illos terminos media. Atque hæc a geometrarum principiis vere derivantur, quanquam aliquibus fortasse inepta videbuntur. Sed quomodocunque accipiantur, rationem continuam rectarum prædictarum AC, AY, AZ, etc., non tollunt: et per consequens, neque duplicationem cubi, quæ suis stat principiis: neque impediunt quin G*i*,

sive dupla Zc, sit æqualis arcui BC, ut in prop. i et iii demonstratum est. AD PROP. VII.

Examinemus autem quadratum hoc numericum Professoris. Quoniam, ut supponit, quadratum a Zc est $\frac{16}{25}$ quorum quadratum a GC est $\frac{25}{25}$, et quadratum ab YQ $\frac{20}{25}$, quadratum autem ab Ac $\frac{10}{16}$, quod minus est quam $\frac{16}{25}$: erit AO major quam Ac. Est autem quadratum ab AG duplum quadrati a GC: erit ergo $\frac{50}{25}$, et quadratum ab YQ $\frac{40}{25}$, et quadratum ab AO $\frac{32}{25}$. Quæ rationes, nempe 5 ad 4, conveniunt cum rationibus rectarum AG, AQ, Ac. Quare, contra id quod demonstrare voluit, AO, Ac sunt æquales.

Etiam falsum est quod quadratum ab AO vel Ac æquale sit $\frac{32}{25}$ quadrati a radio. Quadratum enim a radio est 25. Ergo quadratum a semiradio est $6\frac{1}{4}$. Quare quadratum ab AO est $31\frac{1}{4}$. Non est ergo quadratum ab AO $\frac{32}{25}$. Quadratis ab AG, AQ, Ac, AL respondent numeri hi, 1250, 1000, 800, 650.

Quadratum, juxta methodum meam, a radio est 16; quadratum ab AO, 20; quadratum ab AQ, 25; et quadratum ab AG, $31\frac{1}{4}$. Uterque ergo calculus arithmeticus, mei et illius, consentiunt quatenus recte computatur: sed ille, ut manifestum est, male computavit.

Quadratum ergo, inquiet, ab AG nonne duplum erit quadrati a radio? Ita quidem, duplum erit. Sed calculo arithmetico nunquam demonstrabitur, propter differentiam inter continuam quantitatem, et discretam. Ad quam rem plura ex differentia illa argumenta sunt. Primo, quod inter duos numeros raro interponi medius potest. Secundo, quia calculus arithmeticus separat quadrata per tres

AD PROP. VII. lineas (ut modo dixi) puras, id est nihilias; quas calculus geometricus non recipit. Tertio, quia ex duabus rectis AZ, Z*c*, longitudine æqualibus, altera AZ vere et proprie est rectangulum, altera Z*c* trapezium. Item, rectæ omnes quæ vocantur latera triangulorum, sunt et ipsæ triangula. Quarto, et præcipue, quia arithmetica nihilo magis pertinet ad geometriam, quam ad aliam quamlibet scientiam. In geometria, nulla est radix, nullum quotiens. Itaque qui ex operationibus arithmeticis theoremata geometrica demonstrare velle didicerunt, operam et tempus perdiderunt.

Quantumcunque autem in numeris sit quadratum ab A*c*, rectas tamen AZ, Z*c*, simul sumptas, æquales esse arcui BC, in præcedentibus satis demonstratum est.

Cæterum erige animum, Professor. Nuntio enim tibi, nisi diagonalis AG et recta B*i* ita se mutuo secent, ut ex quatuor partibus maxima, quæ terminatur in *i*, sit secans 30 graduum sumptorum in arcu BC; et proxima illi, quæ terminatur in G, sit sinus arcus 60 graduum in eodem circulo; et proxima huic, quæ terminatur in B, sit secans arcus 30 graduum in circulo cujus radius est B*q*, vel A*e*: et minima quæ terminatur in A, sit sinus arcus graduum 60 in eodem circulo, cujus radius est B*q*, vel A*e*; omnia quæ in præcedentibus visus sum mihi demonstrasse, falsa esse. Dependent enim a præcedentibus nexu necessario, et facile inde deduci possunt a mediocri geometra. Accingere ergo ad spem novam, et geometriæ tuæ nervos (si quos habet) intende omnes.

Quæres fortasse dissensionis inter calculum arithmeticum et geometricum quæ sit causa; et meum esse dices (quæ est tua justitia) causam as-

signare. Redde prius gratiam debitam pro multis problematibus, quibus geometriam jamdudum amplificavi. Non solet, inquies, fieri. Recte hoc. Faciam ergo gratis. AD PROP. VII.

Intelligatur sector quadrantis ABC dividi in rectis lineis ad centrum A numero quocunque ductis, sine latitudine. Horum sectorum vertices erunt tot puncta, quot sunt factæ partes totius sectoris ABC. Quare angulus rectus BAC continebit tot sectorum exiguorum vertices, quot sunt in quadrante ABC sumptæ partes. Sectorum igitur horum exiguorum latera non concurrent in puncto A, sed ipsum divident. Concurrent ergo extra A, nempe GA extra quadratum producta.

Posita ergo A*c* 32, recta sumpta a puncto hoc extra quadratum indivisibili, si fiat ipsi A*c* æqualis, cadet infra *c*. Et huic addita *c*Q, cadet infra Q. Et huic rursus addita QG, cadet infra G. Et tres illæ lineæ sunt æquales tribus A*c*, AQ, AG, et in eadem ratione.

Causa ergo quare calculus arithmeticus differt a geometrico, hæc est; quod linearum sine latitudine nihilitas facit ut calculus arithmeticus incipiat extra quadratum, et calculus geometricus incipit in ipso quadrato ad punctum A.

Distantia autem quæ est inter A et concursum rectarum (latitudine carentium) in GA producta, erit in calculo arithmetico *unitas*.

AD PROPOSITIONEM VIII.

Propositio viii hæc est: 25 quadrata a quinta parte arcus BC, vel rectæ G*i*, æqualia sunt 10 quadratis a semiradio CO.

Falsum est, dicit; primo, quia arcus BC non est æqualis rectæ G*i*.

AD PROP. VIII. Quoniam ergo in i et iii æqualitas hæc aperte demonstrata est, tollitur hæc objectio.

Secundo, quia quadratum a G*i* non est æquale 10 quadratis a semiradio.

Quia hoc etiam iterum demonstratum est ad v, et ostensum est ad vii argumenta ejus numerica omnia esse vitiosa: firmæ sunt i, iii, iv, v, vi, vii, et viii.

AD PROPOSITIONEM IX, X.

Objectiones contra ix et x refutatæ sunt in responsione mea ad vii: unaque in illius operibus sunt geometrica (quæ quidem sua sunt) omnia confutata, ut quæ falsis principiis innituntur.

AD PROPOSITIONEM XI.

Contra xi, quæ est hæc:—Si ducatur recta A*a*, dividens arcum PV bifariam, secans latus CG in *a*, erit G*a* tangens arcus 30 graduum—: primo supputationem suam objicit hanc:—est angulus CA$a=\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$, et AB$r=\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ unius recti, non $\frac{17}{12}$—. Vide, lector, an dubitari possit quin scribendum esset pro CA*a*, C*a*A: errorque esset typographi, quem quidem in suo libro emendare, sed neque objicere neque recitare debuit lector candidus. Quod autem ad propositionem serio opponit, hoc est: *quod punctum concursus rectarum* B*r et* A*a*, *erit extra quadratum.*

Bene est: at rectæ A*a* positio mutari non potest. Sed fieri, inquit, potest ut B*r* producta non transeat per *a*, quia G*a* major est quam vera tangens 30 graduum: cæterum B*r* concurrens cum A*a* producta, faciet angulum æqualem $\frac{7}{12}$ unius recti. Hæc ille. Concedit ergo rectam B*r* ut vult productam, secan-

tem esse arcus 30 graduum in quadrato descripto lateribus æquidistantibus a lateribus quadrati ABGC. Quare a puncto concursus rectarum B*r* et A*a* ducta secans arcus 30 graduum in quadrato exteriore, parellela erit rectæ B*r*; et propterea recta B*r* producta incidet in *a*: quod negavit ille. Propositio ergo hæc xi manet inconcussa. AD PROP. XI.

Quod autem sequitur, tangens anguli graduum $\frac{22}{27}$ $\frac{1}{2}$ et tangens graduum 30 simul sumptæ sunt toto radio minores, affirmat ille falso et sine demonstratione, confidens tabulis secantium, sinuum, et tangentium, quæ falsæ sunt: ut quorum* calculus dependet ab extractione radicum quadratorum, quæ non sunt latera quadratorum, neque omnino lineæ. Nam in quadrato ABGC, quatuor sunt quadrata a recta CO. Si ergo ex 4 extrahatur radix, erit illa radix duo. Duo quæ? Non sunt duo *nihila*. Quæ sunt ergo res illæ duæ? Non sunt duo caballi. Sunt ergo duo quadrata: quorum quadratum ABGC est 4. Sunt autem illa duo (radix illorum quatuor) æqualia rectangulo AO. Quare radix quadrati ab AC est AO: quam radicem geometræ mixti sumunt pro latere AC.

Quod autem tangens 30 graduum una cum recta GL æqualis sit radio CG, manifestum est ex eo quod A*a* dividit sectorem ACL bifariam. Nam si ducta intelligatur recta L*a*, erunt C*a* et L*a* æquales, et angulus GL*a* rectus: et propterea, quia angulus *a*GL est semirectus, erunt GL, L*a* æquales. Quoniam ergo G*a* et *a*C simul sumptæ sunt æquales lateri CG, etiam G*a* et GL simul sumptæ æquales sunt eidem GC. Quanta autem GL vel C*a* sit in

---

* Sic edit. 1669.

AD PROP. XI. numeris non examinabo, cum sciam esse incertum ab ipsa tabularum constructione falsa.

AD PROPOSITIONEM XII.

Propositio xii est, latus cubi sphæræ circumscripti additum lateri cubi in eadem sphæra inscripti rectam constituit æqualem semiperimetro maximi in sphæra circuli.

Negat hanc esse veram: quia quadratum, inquit, a BG non est triplum quadrati a G*a*, propterea quod B*r* producta non transibit per *a*.

Huic objectioni responsum est in responsione ad objectiones proxime superiores.

Negat deinde rectam A*s* transituram per omnes intersectiones arcus Z*n* cum *h*L,* etc.: eo quod AC, AY, AZ, A*h* etc., non sunt continue proportionales.

Sed proportionales esse ad prop. v iterum demonstratum est. Possem etiam, si vellem tanti emere maledicta, demonstrare quod recta ducta per D et G transiret per *s*, atque ductam B*s* æqualem esse rectæ YQ. Item, rectam AO mediam esse proportionalem inter totum arcum BC et dimidium ejusdem. Sed relinquo hæc Professori Saviliano demonstranda.

Quarto, negat cubum a Z*c* duplum esse cubi ab *eb*: quia non sunt, inquit, CG, Z*c*, *eb*, *kl* continue proportionales.

Ego vero eas esse continue proportionales demonstravi iterum a prop. v.

Omnes ergo propositiones meæ, excepta secunda, a Professore publico incolumes sunt.

---

* Sic edit. 1669. Quære *eb* ?

AD PROPOSITIONEM II.

In ii, ut nunc edita, inventus est sphæræ æqualis cubus: nisi et hanc confutaverit Professor. Triumphabit tamen, quod nisi ille priorem reprehendisset, a me inventus non fuisset. Et profecto, si ille, postquam errorem meum detexisset, etiam correxisset, id est cubi ad sphæram rationem invenisset, in partem aliquam hujus laudis venire potuisset. Sed illi impossibile hoc erat, propterea quod rationem inventam circuli ad quadratum, et demonstratam, intelligere non potuit. AD PROP. II.

In demonstratione secundæ propositionis priore confiteor me errasse. Sed errorem quem? Non qui a vitiosis principiis ortus cætera omnia corrumperet, sicut ille: nec ab ignorantia problematum eminentissimorum quæ demonstrata sunt jam olim ab Archimede aliisque veteribus: sed ab eo, quod cum viderem quantum quadrati QRST erat extra circulum BCDE, tantumdem circuli esse extra quadratum, contemplans plana in sublimi, pronuntiavi securius quam oportuit idem de sphæra et cubo. Neque est cur erubescam confiteri errorem meum, quem correxi ipse. Facile erat non modo Professori, sed etiam cuilibet mediocri geometræ qui animum ad diagramma applicaret, cognoscere quod planum per latus RS quadrati QRST, in fig. i ductum, abscindit a sphæra non solidum sub QR et plano PCθ, sed sphæræ segmentum. Mirum ergo non est, nec laude aliqua artis aut ingenii dignum, hoc vidisse. Diligentia sola opus erat, quæ invidis et malevolis nusquam deest. Neque tamen ego indiligens omnino eram. Nam libelli mei exemplaria pauca sine dedicatione in publicum emisi, ut

AD PROP. II. objectionibus geometrarum cognitis, quicquid errassem (quemadmodum feci) emendarem. In quo mihi bene, correctoribus meis successit male.

AD PROFESSORIS EPILOGUM.

Pugnavit Professor in præcedentibus de castello quodam in geometria uno*, et infeliciter. In Epilogo autem triumphos suos præteritos de cæteris ejus partibus annumerat, quas, in operibus meis non recte tractatas antehac, a se refutatas esse dicit. Quare autem? Quoniam *monitione*, inquit, *opus esse videbatur qualis fuerim, ne magni nominis obtentu aliis fraudi essem.* Non videntur mihi quæ hic dicit, bene cohærere. *Ne aliis*, inquit, *fraudi essem.* Quibus aliis? An geometris? At valde pauci, aut nulli omnino sunt, præter discipulos vel condiscipulos illius, qui iisdem utuntur principiis quæ modo absurda esse docui. Illi ergo non magis monitione opus habuere, quam Professor ipse. Quos ergo monuit, nisi illos qui ratiocinari quidem potuerunt, geometriam autem nondum docti erant? Hos monuit: id est, homines liberali ingenio præditos, radicum geometricarum et symbolographiæ nescios, sed ratione naturali ne summis quidem geometris inferiores, monuit. Hi erant, apud quos magnum mihi nomen esse Professori videbatur. Vide, lector, invidiam hominis theologi. Quod viri boni de me non male sentiant, valde lætor: nam ut nomen magnum mea ipsius prædicatione mihi compararem, aut ille sibi arrogantia sua, impossibile est. Est ergo aliquid in operibus meis propter

---

* Sic edit. 1669. Quære, *mea?*

AD PROFESSORIS EPILOGUM.

quod nomen meum magnum est, quod in illis non est. Itaque, judicantibus viris liberis prudentibusque, victum se esse confitetur. Sed unde accidit ut Professor, qui nomen meum magnum esse putat, suum esse non putat, cum toties me prostraverit? Conquereretur forte de ignorantia judicantium. At cur non magnum nomen habet ille apud algebristas? Quia impossibile erat. Sunt enim omnes fere inter se æquales. Imo, sunt inter illos aliqui qui celeritate ingenii Professorem longe superant, et multo plures veritates in eodem tempore quam ille confutare possunt.

Quomodo autem necessarium erat, in quæstione mathematica, admonere quemquam *qualis fuerim?* Dicere qualis fuerim, non est meum. Qui conversatione mea usi sunt frequenter, illi dicant. Ego dicam tantum, qualis non fuerim. Bellum erat civile: ego in partibus contra regem nunquam fui. Ego epistolarum neque regis, neque cujusquam qui a rege stetit, arcana aperui aut inimicis prodidi. In lege Amnestiæ quæ sequuta est, flagitium meum nullum nominatur. Ego illum non lacessivi: tantummodo respondi, ita ut commoveretur; quod flagitium non est. Conqueritur sicut puer, quia non vincit: cum tamen sui ipsius culpa sit, quod non videatur multis esse doctus. Ausculta paucis, O Professor Academice! Si vis esse aliquid, fac ut quæ scribis a quamplurimis intelligantur. Cave ergo a Symbolographia, nisi siqua* omnibus cognita fuerit. Utilis fortasse esse potest tibi ipsi in musæo tuo: sed in populo, et extra sectam tuam (sectam dico mathematicam) incantationis et imposturæ

* Sic edit. 1669.

AD PROFESSORIS EPILOGUM.

similis est. Recipe in animum tuum per cogitationem vehementem rerum ipsarum, non literarum aut sonorum, imagines. In scientiis, sequere rationem naturalem, sperne authoritatem magistrorum: in vita civili, sequere authoritatem publicam, sperne rationem privatam. Hoc si ita feceris, si non ditior, eruditior tamen fies. Opuscula illa tua, *Elenchum geometriæ Hobbianæ*, *Correctionem debitam*, *Puncti dispunctionem*, *Hobbium Heautontimorumenon*, ne magni æstimes: nam puerilia, rustica, indocta, inficeta sunt. Neque ea ego quæ ad tua respondi, digna censeo quæ a posteris legantur. Permitte maledicta emori, theologe. Ex geometricis meis quæ durare vellem, et per te non peribunt, hæc sunt:—i. Quadratura circuli—ii. Cubatio sphæræ—iii. Duplicatio cubi—iv. Inventio mediarum quotcunque inter duas rectas datas—v. Divisio anguli dati in ratione data—vi. Inventio centri gravitatis semicirculi—vii. Doctrina rationum tota—viii. Scabiei quam geometriæ affricuerat arithmetica, (quod meorum operum maximum esse judico), detersio. Lassesco jam. Vale, lector. Et tu quoque vale, Professor Saviliane: et fruere unius et apertæ reprehensionis gloriola tua sine invidia.

FINIS VOLUMINIS QUARTI.

LONDINI: RICHARDS, ST. MARTIN'S LANE.